LUOJIA MATHEMATICS LUOJIA MATHEMATICS

珞珈数学

LUOJIA MATHEMATICS

2004.12 总第11期

武汉大学数学与统计学院 主办

数学与统计学院基地班联谊会 承办

THE MATHEMATICS & STATISTIC SCHOOL

学院领导与2000级基地班全体学生合影

数学基地评估专家与学生座谈

德国教授为基地班学生做学术讲座

基地班学生张晓伟在
香港浸会大学交流学习时偶遇金庸

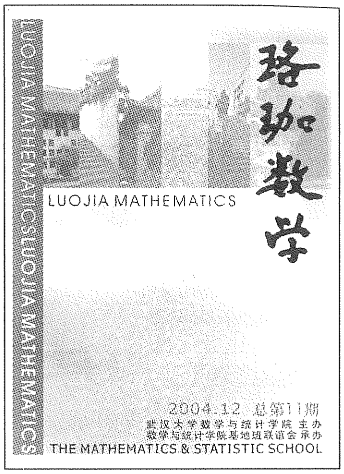
基地班学生在上科研讨论班

2004级基地班学生春游掠影

刊首语

如果一个人要领会钻研数学的兴奋，他必须做数学奥秘的热忱学生。只有在把他能力的一大部分用于研究并且取得创造和发现新真理的成功时，他才有可能因为看到自己得到的理想的胜利而享受到最大的快乐。他在发现了一件事实，或者宣布了一条新定律，或者以任何方式为真理增添了新颖的美之后，他就成了我们每个人的债权人了。我们时代的数学的最大荣耀就是，数学的成就正在被当今的研究者们以极大的幅度丰富着和扩展着，因而这门最古老的科学成为所有科学中最富有活力、最富有青春和最富有成长力的科学。

——R.D.Carmichael



今天我以基地班为荣，明天基地班为我骄傲！

刊名题词：路见可

顾　　问：陈　化　尹常倬

指导老师：吴蜀江　黄安云
　　　　　李　好

主　　编：楚　静

副 主 编：牛鋆辉　胡　雪

编　　委：王毓乾　王　辉
　　　　　陈　颖　魏　博
　　　　　李俊睿

封面设计：牛鋆辉

主　　办：数学与统计学院

承　　办：数学基地班联谊会

承　　印：天星印务
　　　　68766036　68762441

在数学领域中，提出问题的艺术比解答问题的艺术更为重要。

——大卫·希尔伯特

目　录

H.Poincar é 的约定主义与数学公理

01 数学基地班 梁永祺

摘 要：总结 H.Poincaré 的科学哲学的约定主义思想，对《科学与假设》一书中约定主义在几何公理选择上的论述进行详细的分析。讨论约定主义在各种数学公理体系中的具体分析，阐述不完全性定理是约定主义的支持的观点，进一步对数学公理建立的来源和选择进行讨论。

关键字：科学哲学，数学公理，庞加莱(彭加勒)，《科学与假设》，约定主义

一 H.Poincaré 简介

Henri.Poincaré(1854-1912，亨利·庞加莱[注])，法国著名数学家、数学物理学家、天文学家、科学哲学家。巴黎高等工业学校毕业，1879 年获数学博士学位。1881 年于巴黎大学任数学、物理、天文学教授直到逝世。1887 年，他被选进法国科学院，1906 年成为法国科学院院长，1908 年当选为法兰西学院院士。

在数学、物力领域，庞加莱是公认的 19 世纪末 20 世纪初的领袖数学家，被认为是对数学和它的应用具有最全面知识的最后一人。他的研究论文涉及几乎数学所有基本领域以及物理学、天文学。它研究了自首函数和微分方程定性理论，开创了组合拓扑学方向，是现代代数拓扑学的奠基人，提出至今仍未解决的著名的庞加莱猜想。他的主要科学著作有《拓扑学》、《用微分方程确定的曲线》、《天体力学的新方法》等。[1][2]

庞加莱的哲学观点的形成与它对自然科学的研究分不开，特别是受他数学研究的影响，他试图对自然科学的成就作出哲学论证。他主要的哲学著作有《科学与假设》(1902 年)、《科学的价值》(1905 年)、《科学与方法》(1909 年)以及他死后出版的《最后的沉思》(1912 年)等。[3]

二 约定主义

关于约定主义，林超然主编的《现代科学哲学教程》[3]有如下的概括：

"庞加莱是约定主义的创始人。他在《科学与假设》一书中首次系统的阐述了约定主义，这是他在对数理科学的基础进行了敏锐的、批判性的审查和分析的基础之上提出来的。他通过对欧氏几何和非欧几何体系的研究得出了一个结论：既约定主义是科学定律和理论的本性。"

《教程》中对庞加莱的约定主义的基本思想、提出约定的条件和约定主义的意义指出以下几点：

1、约定主义的基本思想

约定主义的基本思想是：科学的概念、理论、原则等等只是一些经验符号、记号，不是客观实在本身的反映。它们不是客观实在本身的反映，它们不是起源于具有客观基础的经验也不是先天的，而是科学家彼此约定的，是由于大家同意才发生作用的。

庞加莱分析了几何公理，他认为几何公理不是先天综合的，也不是实验的真理，从而得出几何公理是约定的。他把约定主义的思想由几何学扩及力学、物理学，认为在这些科

注：H.Poincaré，一些科学哲学的书籍中译作彭加勒，数学史上一般译作庞加莱，本文采用数学史中惯用的译法。

学中也存在着约定因素。在庞加莱看来，科学原则在某种程度上都有约定的性质，但不能把整个科学都归结为约定。他反对把约定在科学中的作用肆意夸大，以致于说定律、科学事实都是由科学家创造的。

2、约定提出的条件

庞加莱认为，在数学及相关科学中，可以看出自由约定的特征，约定是精神的自由活动的产品。约定提出的条件是：一要受逻辑无矛盾要求的限制，二要受实验事实的引导。庞加莱不同意有人把约定的自由无限扩大，以致于把约定当作主体任意的虚构。甚至把自然界本身也当作约定的产物。

3、约定主义的意义

庞加莱从近代科学发展的历史中看到，无论是经验论，还是先验论，都不能圆满的说明科学理论体系的特征，而约定主义却能反映某些科学理论体系的特征。19 世纪末到 20 世纪初，科学界受到了狭隘经验主义和先验论的影响，阻碍了科学创造。于此时提出约定主义，在科学界犹如一股新风，其意义有两个方面：一是反映科学创造的要求，二是方法论上的意义。

需要指出的是，《教程》提到的上述的概括并不完全准确。“科学的概念、理论、原则等等……是科学家彼此约定的，是由于大家同意才发生作用的”，庞加莱认为“它（科学）的原理不过是一种公约”[4]，但不代表他认为科学的理论也是科学家彼此约定的，更不能说科学的概念、理论、原则是由于大家同意才发生作用的。就以非欧几何为例，非欧几何刚问世的时候并不是大家同意的，然而它的的确确发生作用，尽管不是大家认同的，而逻辑上的正确性使得它发生作用。“约定提出的条件……二要受实验事实的引导”对于数学而言，这并不准确。庞加莱在《科学与假设》中论述他的约定主义思想主要是从几何学角度展开的，而不是从讨论物理与实验展开，所以并不能说约定的提出应受实验事实的引导，只能认为约定的提出要受经验事实的引导，经验事实的范围比实验事实更广。

本文仅就庞加莱的约定主义在数学公理的选择上的论证进行深入的讨论，而不涉及庞加莱把他的约定主义扩及物理学原理的那部分内容。

三 《科学与假设》对数与量的分析和论证

《科学与假设》[4]一书中，庞加莱首先对数学推理的性质和数学量与实验的本质进行了深入的分析，这是导出他对几何学公理的约定主义的前提。作为一个数学家，庞加莱有必要首先弄清楚数学推理的性质，在对此的肯定之下才去讨论数学公理才是有意义的。抛开了严密的推理形式，数学的公理是毫无意义的，即使有公理也无法建立一套理论。弄清楚数学量与实验的关系是区分数学与经验所必需的，是讨论“公理是一种约定”，而非经验，的前提。

三段论是数学推理的基础，然而“……数学推理的本身有一种创造性，因此它与三段论实有区别”，“两者的区别是深刻的”。为了说明这种区别，庞加莱举了自然数定义的例子。简单的说来自然数的严格定义是：先固定一个数值，称作 1，是自然数集合中的一元，每一个自然数 n 都有一个后继的数记作 n+1，它也被定义为自然数集合中的一元。这是一个归纳性的定义，定义好头一个、定义好一个生成下一个的规则，也就将自然数完全定义完毕了。用相似的方法，可定义自然数的加法。一个熟知的事实是自然数的加法具有交换律、结合律。这并不是事先就存在的，而是通过上述两个定义推导出来的。如果用简单的三段论，人们只可能做有限次的推导，那是什么导致对于所有的无穷多的自然数，这些

运算规律都是成立的呢？这就是数学推理与三段论的一个很本质的区别。“这就是循环证明法，人们现在 n=1 时建立一个定理，然后指出如它在 n-1 时为真，则在 n 时亦真，于是人们结论它对任何整数也是真的。”这就是一般所说的数学归纳法。庞加莱指出，由于这样的推理，我们就弄清楚了某定理的特别结论可以用纯粹分析的方法去核验。我们无法核验无穷次，但我们只核验从 n-1 到 n 的推理是正确的，我们就相信这样的推理作无数次也是正确的。庞加莱揭示了“这(循环推理)是从有限数到无穷数的推理工具”。循环推理(数学归纳法)的本质是什么，它成立的依据是什么？“循环推理所依据的判断还可以用别的方式表示，例如在无穷个相异的整数中，我们可说必有一整数较小于其他各数”，实际上这仅是数学归纳法成立的一个等价的命题，无法由它导出与已定义好的事实的矛盾。“所以循环推理的规则，决不能变为矛盾原理，这是谁也不能否认的结论。”就是说循环推理并非来源于矛盾律或同一律。“这条规则又不是从实验上得来的，实验……只能推导这一串数或多或少的但总是有限止的部分。”于是，庞加莱作出结论：“这条规则，既非分析法(三段论推理与矛盾律)所能证明，而又非经验所能核验的，正是先验的综合判断的实例。”“原来这不过是表现精神力量之伟大，它能断定假使某种动作一次可能，则同一动作又可重复无穷次。精神对这种强大力量具有一种直接的直觉，而经验不过是给它一种利用的机会，因而能够有所领悟。”如果经验不复存在，这种“精神力量”也就无法通过数学归纳法来表现。“数学归纳法或即循环证明法是必然支配着我们的，因为它只是精神本质的一种特性的肯定啊。”

接下来讨论的是数学量与实验的关系。通过自然数可以定义有理数，而并不能十分顺利的定义实数。实数是数学中的连续统，它与物理中的连续统不是同一个概念。“数学家所研究的不是物，而是物与物之间的关系；只要物与物的关系不变，则物虽变异，他们也不关心。物质对他们是不重要的，使他们感兴趣的只是物的形式。”实数的定义方式与自然数的差异很大，通过介绍戴得金(Dedekind)的，通过集合划分的方式定义了实数连续统。每一个实数其实是一个集合的划分，我们所见的小数符号仅仅是为这个划分取个名字。这样的定义保留了实数与实数之间的联系，而实数是什么不是重要的。通过这种连续统的定义方式与物理的连续统（物理的连续统仅是实验无法区分细微的差别）举例相比较，庞加莱指出“数学的连续统将不过是精神的纯粹创造品，与经验毫不相干的了。”“撮要言之，精神有创造符号的能力，因此它能建设数学的连续统，而不过是一些符号的特别系统而已。只是为了免去一切矛盾，他的权利才是有限制的；然精神如无经验给它以理由，则也不会用它的。”就是说，尽管数学连续统的建设是精神创造的，但也无法离开经验。“人们的精神受经验的必要性支配，才施展他的创造技能。”

这些讨论是几何学公理的基础，“这是当人们想在我们刚才所规定的连续统中引入了度量时，于是这种连续统才成为空间，而几何学诞生”，庞加莱接下来对几何公理有如下文的讨论。

四　《科学与假设》对几何学的分析和论证

在《科学与假设》一书中庞加莱对几何学的分析和论证分了三部分：非欧几里得几何学、空间与几何、经验与几何。在这三部分的分析中，他指出几何公理是约定的，这种约定是自由的，但是需要受到内部矛盾的约束、需要受到经验的引导。

“凡一结论必先有前提，这些前提，或本身即明显的，故无需证明，或仅根据别的命题才能成立，但由于我们既不能这样追究至无穷，则凡演绎的科学，特别是几何学，必先建设在几条不可证明的公理上才行。”就是说，任何演绎科学如要向前追述一个为什么，总会走到一个无法证明的命题之上，这就是公理，因为我们没有办法向前追究到无穷，它是无法避免的。对比欧几里德几何学，鲍耶、罗巴切夫斯基几何学，黎曼几何学，三者的公理系统，最主要的差别是是否能够自一点引一条直线与一给定直线平行。欧氏几何学假定这样的直线有且仅有一条，罗氏几何学假定这样的直线有无数条，黎曼几何学假定没有这样的直线。《科学与假设》对比了这三种几何学，特别的对于罗氏几何与欧氏几何，可以通过一种“字典”将罗氏几何定理里的名词逐一翻译，将得到一个欧氏几何的定理，于是只要欧氏几何公理系统内部不存在矛盾，罗氏几何的内部也不会有矛盾的存在。罗氏几何公理是受到系统无矛盾的约束的。“一个数学中的物的存在，只需它的定义的本身或与先前认可的命题都不发生矛盾”。有了这个存在性，数学就可以定义其他的概念，只要不与已有公理以及公理推导出的定理发生矛盾。而庞加莱同意定义往往也就含有新的公理。于是人们需要关心几何学公理的性质为何。庞加莱否定了几何公理是如同数学归纳法一样的先验综合的判断。如果欧氏几何公理事先验综合判断的话，“它们既然用那样大的力量来支配我们，以致我们既不能设想相反的命题，又不能在它的上面建立理论的体系。非欧氏几何学也将没有了。”然而非欧氏几何确实存在，所以几何公理绝不可能是先验的。接下来庞加莱又否定了几何公理是实验的真理。“人们不是对那些理想的直线和圆周实验的；人们只能用实在的物质实验。”也即数学的存在非我们可以用来实验的物理的存在，我们实验所得出的，包括别的经验来源都不可能作为几何公理。至此，庞加莱下结论“然则几何学的公理既非先验综合的判断，亦非经验的事实。”“这原来是些公约；在一切可能的公约中，我们的选择是受了经验的事实引导；但它仍是自由的，它为免去一切的矛盾起见，才有所限制。”“换句话说，几何学公理(我们并不谈算术的)其实不过是伪装的定义。”这是庞加莱约定主义的主要结论，既是约定的，自由约定的，但也受不自相矛盾的约束。对于欧氏几何，庞加莱指出“欧氏几何是并且永久是便利的几何：一、因为它是最简明的……二、因为它与自然界的固体的性质颇能符合……”它表达方式的简明，人们精神的习惯，一种说不出的直接的直觉，使得人们在几何学刚诞生的时候选择了欧氏几何。

庞加莱紧接着讨论空间与几何的关系。换一个角度而言，这三种二维的几何都能够放在三维欧氏空间中看，欧氏几何研究的是高斯曲率为零的平面上的几何，罗氏几何研究的是高斯曲率恒为负常数的马鞍形曲面上的几何，黎曼几何研究的是高斯曲率恒为正常数的球面上的几何学。庞加莱生动的假定存在一些活在这些曲面里的二维有理性的动物。他们通过实验无法知道他们所处的空间曲面是平坦的还是弯曲的，他们的经验无法告诉他们生活在哪一种几何空间中。例如光线沿“直”线传播，所谓的直仅仅是走一条最短的路线。生活在空间里头的理智生物凭经验知道所谓的“直”，而不知道这个“直”所在的空间本身是不是弯曲的。对这种理智生物而言，他们生活的空间是连续的、没有边界的、各向同性的、均匀的，却无法判断是“弯曲”还是“平直”的。所以我们的经验引导我们选择哪一种几何学，我们选择的几何学只是我们认为方便的几何学，与我们的直觉、经验

吻合得最好几何学。生活在弯曲空间的理智生物自然选择它们的曲面几何学，而不选择我们认为便利的欧氏平面几何学。这里庞加莱强调了约定选择的自由性。而我们感觉到的空间是怎么样子的？庞加莱还细致分析了人的视觉，得出人们感觉到的空间也并非是几何学里的理想空间的结论，“表象的空间只是几何的空间的影像，”但是“我们并非把外物表示于几何的空间，我们只是把这物体当作在几何的空间而对它推理。”这是我们的经验对几何的作用。人们讨论一个几何对象，“并不问一对象是变态或变位”，只关心它的相对位置的变化，这些相对的量就是几何研究的对象——几何量。用现代一点的话来说，几何研究的对象就是一类变换群之下的不变量。欧氏几何是研究合同变换的不变量的几何学，拓扑学是研究同胚变换下的不变量的几何学。庞加莱下此结论：“人们可见的经验在几何学的萌芽上，有不可缺少的作用；但因此就说几何学是或有一部分是实验的科学，那就错了。”“经验引导我们做这个选择，但不支配着我们；它告诉我们并不是某某几何为最真实，确是使我们知道某种最为便利。”到此，庞加莱探讨了几何公理的来源，它由经验引导却不由经验决定。

关于几何学，庞加莱最后论述了经验与几何的关系。在这里庞加莱举了种种的实验情况，目的是说明几何的公理和理论并不能用实验去验证或者证伪。“任何实验与欧几里得公设永不会有所矛盾；而任何实验与罗氏公设也永不会有所矛盾。”“我已申明，无论何种实验，都有用欧氏的假设的解析，但同时也可有用非欧氏的假设的解析。”于是有这样的结论“实验对于罗氏几何与欧氏几何不能有所定夺。”“实验不过告知我们物与物间的关系；至于物与空间的关系，或空间各部分的相互关系，都是实验达不到，也是不能达到的事呵。”“所以经验只达到物体，并不达到空间。”举个例子说，几何中的点是一个抽象的没有长度面积的零维的空间，我们可以实验的只是至多只是一个很细小的实物，如分子，但却无法达到对我们的几何空间做实验。这些论述是为了支持他的约定主义，更好的证明几何公理非由经验决定，更强调了几何不由实验来验证。

作为结语，庞加莱指出：“用自然的选择法，我们的精神能适合外界的情形，它采用了最有利于人种的几何；换句话说，那最便利的几何。这一点实与我们的结论完全相符合的，几何学不是真实的，但是有益的。”

五　约定主义于数学公理的具体分析

庞加莱对几何公理深入地讨论，得出约定主义的结论。抛开这一狭窄的领域，在数学中各个领域的公理，也可以广泛的使用约定主义来进行讨论。与庞加莱同一年代的大数学家希尔伯特(David.Hilbert)希望将数学大厦建立在一套简明的公理系统之上，他提出数学公理化的思想，至此以后，数学的各个分支的发展都遵循着这个思想，于是公理对于数学而言尤为重要。

整个数学的基础中有几条最重要的公理：

选择公理　设 $T=\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}$ 为一族非空集合 A_α，$\alpha\in I$（I 为指标集），组成的非空集合，则存在一个 T 上的函数 f 使得对所有 $\alpha\in I$ 恒有 $f(A_\alpha)\in A_\alpha$。

良序公理　每个集合都存在一个良序。

极大原理　设 T 为由集合 S 的若干子集作元素组成的非空集合，T 按包含关系成一个偏序集。如果 T 的每一个链都有一个上界，则 T 有一个极大元素。

可以证明这三个公理是相互等价的。对于这种抽象的论断，没有人会认为这是经验

所决定的。然而这却是由经验引导的。选择公理换一种较为浅显说法就是，一堆集合中存在着一个方法在每个集合中取出一个元素构成一个新的集合。对于有限的情况，人们不会反对这是成立的，就有限个集合摆在那里，每个只有有限个元素，当然可以每个集合选一个数组成一个新的集合，这是我们的经验告诉我们的。而对于无穷的情况呢？没有人可以真正说清楚究竟可以还是不可以，所以这条公理是由经验引导的，但却无法由经验决定。而人们是否应该选择这条公理到数学的公理系统之中呢？这是自由约定的。如果数学的公理系统中包含它，将有很多精彩的结论，但也会导致一些不符合经验的悖论。所以并不是所有数学家都同意将它作为公理之一。庞加莱认为公理的选择的是依据实际的便利，而我认为在此是不适用的。同意将它作为公理的数学家主要认为：缺少了它，数学的许多美的结论都将失去，所以有必要保留它作为公理。认为不应该将它作为公理的数学家主要是因为它会导致与所谓“直观”相矛盾的悖论。这体现了约定的自由性，但是不能说哪一个较为便利，一方的标准是数学美，另一方的标准是与经验的符合度。

庞加莱同意每一个定义里都内涵一个新的公理。代数学中，群是这样定义的：一个集合以及它之上的一种运算合称为一个群，如果这运算具有封闭性、结合性，集合存在运算的单位元，每个元素有逆元。群定义的运算和集合元素所应满足的几点性质其实就是群论的公理。这也纯粹是一种自由约定。首先，它不是先验的，如果它是先验的我们将不可能用相似的方法和有区别的公理的建立环论、域论。它也不是经验的，没有任何实验，也没有任何别的经验来源能够验证这些公理的正确性。这些代数学公理是我们自由约定的，所以我们可以建立群论、环论、域论等各种理论。这些公理不会导出自身的矛盾。这些公理的也是由经验引导的。这里的经验只能是已有的一些数学元素和运算定律，例如矩阵和矩阵的乘法和加法所满足的就是环的公理，矩阵就是环的一个特例。选择这些公理是因为便利（这不能说是经验上的便利，只能说是理论意义上的），研究清楚了群、环、域等一些代数系统的结构和性质，一般的运算就可以毫不费劲的描述，而仅需验证它是否满足其中某一套公理。例如环的性质研究清楚了，矩阵的运算就可以清楚的描述。但我认为这与其说是一种便利才选择这样的公理系统，不如说这个公理系统是一种更高度的抽象。将一般数学对象的共性抽象出来研究，建立一套适用于这些具有共性的对象的公理系统，特殊的数学对象的性质随之就研究清楚。

对于抽象的距离，它应满足距离公理：集合 S，映射 $d:S\times S\to R$ 称为距离，如果它满足以下几条：$\forall a,b,c\in S$，1. $d(a,b)\geq 0$，$d(a,b)=0$当且仅当 $a=b$; 2. $d(a,b)=d(b,a)$；3. $d(a,b)\leq d(a,c)+d(b,c)$。这也是数学的约定，决非经验的或者先验的。可以明显的看出它们由经验引导，两物体的距离总是非负的，只有两个物体是同一个是它们的距离才会是0，两物体的距离不会因为你描述它们的先后而改变，三个物体满足的是三角形两边和大于第三边的人们经验普遍认同的观点。这样的公理的确带来了理论意义上的便利，但更核心的是它是一些数学现象的更高层次抽象。这样的距离可以用来处理一般欧氏空间里点与点之间的距离，也可以用来处理函数空间里函数与函数的“距离”，也可以认为是抽象集合里的元素之间的一种特定关系。

拓扑学的公理主要是其中所谓开集、邻域所应满足的几个条件，在此不再列举。它们之中有的是经验引导的，有的是为了建立整个理论体系时带来技术上便利，有的是普遍

理论中的更高抽象。

六　不完全性定理与约定主义

在公理集合论中，歌德尔(K.Gödel)的不完全性定理是庞加莱约定主义的最好支持。不完全性定理断言，任何一个确定的公理系统，都可以向其中添加一条新的公理，使得这条公理不与已有的公理系统中的所有公理矛盾，也不能由这些已有的公理推导出来。换句话说，任意给定一个公理系统，可以再添加一条新的公理做成一个新的公理系统。这个定理是经过数学、逻辑严格证明的。这正正是对约定主义的最好的支持。由于不完全性定理，公理纯粹是一种约定，而且还强调约定的自由性，只要受不导致矛盾的约束，而由定理的判断，总可以克服这种矛盾的约束添加公理。

在数学史上著名的希尔伯特 23 问题中的第一问题——连续统假设：在整数和实数这两种不同的无穷多之间不存在另外一种不一样的无穷多，就是这样被解决的。已证明了连续统假设是不与现在所有公理矛盾的命题，就是说它是那种可以加入的新公理。而是否应该将它约定为公理，数学家们没有过多的讨论，一般认为这样已经是对问题的解决。这个数学史上的例子很有力的支持了庞加莱的约定主义，特别是约定的自由性。

由这些具体的数学公理的讨论可以得出结论，庞加莱的约定主义对数学公理有很好的描述，数学公理在很大程度上是一种自由的约定。

七　数学公理的来源与选择

约定主义给我们的启示是：数学的公理是一种约定，自由的约定。数学中歌德尔的不完全性定理很好的支持了这样一个观点。我们现在所面临的关键问题就是数学公理从何而来，如何对数学公理进行选择？就是假设我们已经有一个公理系统，如何导出新的公理，公理的来源是什么，如果有这样一条新公理如何去选择，是否加入它形成一个新的公理系统？就是要解决如何进行自由约定的问题。庞加莱的约定主义中有一部分关于这个问题的思想，但是没有解决这一个问题。

先考察公理的来源。庞加莱认为公理是由经验引导的，所以公理的一个来源就是经验。这方面的公理是不可缺的，数学中最基本的最原始的理念来源于经验。欧几里得几何学中的平行公理：过一点有且仅有一条与已知直线平行的直线，就是来源于经验的公理。还有的公理来源于描述客观世界时的便利，上述的平行公理也是很好的一个例子，这都是庞加莱的观点。另一方面有的公理是为了建立更为丰富理论为了得出更为美的结论。例如，代数学中体结构的公理和域结构的公理相差不远，仅仅相差乘法运算的交换性。域论的结论是十分丰富的，理论体系是十分完整的，而关于体的漂亮的结论却不多。体的元素乘法没有交换性大大阻碍了逻辑推理，所得出的理论当然贫乏。上述的选择公理也是这样的公理。这样的公理也是不可缺的。数学理论的发展不应受公理系统的制约，不完全性定理给人们提供了很好的基础，公理系统对理论的发展有阻碍将是极大的可惜。公理也来源于建立整个理论体系时为了逻辑推理的便利时添加的。拓扑学中的邻域的公理：子集合 A 是 a 的一个邻域，则包含 A 的集合 B 也是 a 的邻域，这就是为了推理的便利而提出的公理。出于数学理论发展的角度，这样的公理也是有充分理由存在的。庞加莱在他的另一篇文章中《数学中的直觉和逻辑》中指出“逻辑不是充分的；证明的科学并非全部科学，直觉作为补足物必然保持它的作用，我正要说直觉作为平衡物或作为逻辑的矫正物。”庞加莱强调直觉在整个数学理论中的重要

性。作为整个数学理论起点的数学公理,自然不能忽视直觉的作用。直觉也是数学公理的一个重要的来源,而且是一个最根本的来源。一个最根本的公理：与第三数相等的两个数是相等的。这是纯粹来源于一种直觉,这种直觉要我们相信它。而如果没有了它,数学也几乎是不存在的了。还有许多这种来源于直觉的公理。最后一个公理的重要来源是数学现象的抽象。如上一节所提到的群论的公理、距离公理、拓扑学公理,这些的某一部分都是来源于数学现象的更高抽象。数学理论要发展,其中一条途径是通过更高的抽象，从而解决更普遍的问题，所得出的结论适用的范围更广泛,对一整类的数学问题适用。建立这一类公理,就要从已知的数学现象中进行抽象,寻求它们的共性，这往往是从理论的研究不断丰富的过程中自觉地提出来的，从而建立基于这些公理的理论，研究这些公理的内在联系。

综述，自由约定的数学公理主要有以下几方面来源:1.经验;2.描述客观现象的便利;3.理论体系本身的完整性;4.推理的便利;5.直觉;6.理论更高抽象的需要。

数学公理如何选择，这与数学公理的来源密切相关。数学公理是在它的来源中选择的。数学公理的来源可以导致一条公理的选择,能够成为公理选择的理由,否则理论的研究不会从某个来源中无故出现一条新的公理。就是说,与经验相符合,不与已有系统矛盾的命题有很多,但怎样才能成为一个公理?它必须是满足某个公理的来源的。例如我们得到一个与现有系统不矛盾的与经验相符合的命题,它是能成为一个公理吗？还是它仅仅是一个普通的命题？它要么是很基本的无法用更简单性使得公理推出，要么很有利于现象的描述,要么完善理论的本身,要么给许多推理带来便利，要么对理论的更高抽象有重要意义。否则的话它仅仅是一条普通的命题，不足以成为一个公理。简言之,公理的选择和公理的来源是一致的,只是程度的不同,某个来源中的一个命题如果能够大大发展数学理论本身,人们就愿意约定它为公理,而每个人对此的标准不一样，较多的人认为它对数学自身发展有重要意义它就将是合理的。这正体现了自由约定的思想。

最后对这些来源作一个分类。上述六个方面的来源中 1、5 是同一类的，这些来源的公理都是数学中最为基本的公理，数学发源时就有的公理;2 是另一类，它的引入只因为描述客观现象的推动;3、4、6 是一类，由于数学自身发展完善所引进的公理。按照希尔伯特的观点“问题推动数学的发展”[5],这样的问题来源于实际和数学学科的本身，分别对应了后两种公理的来源。

八　结语

数学的公理是一种自由的约定，是精神的自由活动的产品，它受到自身系统逻辑不发生矛盾的约束,它受经验的引导。数学公理的来源和选择主要是数学发源本身的需要、数学描述客观的需要和数学自身完善发展的需要。

参考文献

[1]《古今数学思想》,[美]克莱因,上海科学技术出版社,1981 年第 1 版

[2]《数学家小辞典》,华清、白水,知识出版社,1987 年第 1 版

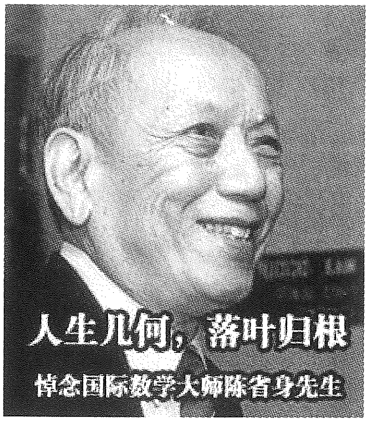
[3]《现代科学哲学教程》,林超然，浙江大学出版社,1988 年第 1 版

[4]《科学与假设》,[法]彭加勒,商务印书馆,1957 年重印新 1 版

[5]《数学与文化》,邓东皋、孙小礼、张祖贵,北京大学出版社,1990 年第 1 版

编者按：惊闻一代数学大师陈省身于2004年12月3日逝世，悲痛之余，更加缅怀这位被誉为“微分几何之父”的数学家。前不久，人们为了纪念他对数学的杰出贡献，以他的名字命名了一颗行星。现在陈先生离开了我们，这颗行星和陈先生在数学领域所作出的杰出成果一样，将永远照亮我们在数学上继续探索的道路。

省身先生 吾爱吾师



南开大学校长　侯自新

陈先生是我一生最敬重的师长，我受到他的教诲和关心，我对他的尊敬与感激，用语言无法表达。我与陈先生有20多年的交往。这20多年中，我从他身上学到了很多，不仅仅跟他学数学、学怎样做数学，更重要的是学做人。

陈先生是中美关系解冻之后第一批到祖国访问的美籍华人科学家之一，2000年回南开大学定居，到2004年12月辞世，30余年中，他主做了4件大事。

第一，为数学人才的培养倾注了全部心血。立足国内，培养高层次科学人才是他一贯的理念，他于1985年创立南开数学研究所，每年都要花大量时间邀请全世界的数学家来访问。同时输送人才出国深造。现在中国数学界最优秀的骨干，几乎都受惠于陈先生，得到过他的支持、帮助和爱护。在南开数学所成立仪式上，他说：“要为南开数学所，为中国的数学，鞠躬尽瘁，死而后已。”

第二，搭建中外数学交流的桥梁。“文革”之后，中国数学百废待兴。上世纪80年代初，他多次领衔召开“双微会”（微分几何与微发方程国际会议），恢复了中断多年的国内外数学的交流。南开数学研究所成立之后，由他主持先后举办了多次学术年活动，邀请国内外数学家同台讲课交流。2002年在北京召开的国际数学家大会，是他早在1993年与丘成桐共同倡议的，受到党和政府高度重视。通过这些活动，他把中国和世界数学界广泛联系在一起，使中国数学家成为国际数学大家庭中一个非常积极、有活力的成员。

第三，对中国科学和教育事业做出了历史性的贡献。由他倡导、在当时国家教委支持下，南开从1986年开始举办数学试点班，这为以后高校设立基础学科教学基地提供了宝贵经验。1984年他创办了数学研究生暑期学校，邀请国内外名师对来自国内主要高校优秀数学研究生系统讲述当代数学核心课程，介绍重大前沿课题，这项活动延续至今，并推广到其他主要基础学科，对提高我国研究生教育水平发挥了重大作用。

第四，热心科普事业。他应邀担任天津科技馆名誉馆长，在那里设立数学分馆。他亲自设计2004年“数学之美”挂历赠送给数学爱好者，把数学史上最重要的概念用通俗的方式介绍给大众，甚至对小学生的数学活动也不遗余力地支持，天津市小学生数学邀请赛起名为“陈省身杯”。

陈先生与南开大学有着深厚的情缘。他曾不止一次深情地说过:“我最美好的年华是在南开度过的。”他的数学事业从南开起步,2000年又定居南开,把南开作为事业的新起点,并达到了一个新的高峰。他对南开的贡献不仅限于数学,对学校整体的发展,在很多问题上都给予建议和指导。例如,他十分关注生命科学的发展,专门与我们讨论南开生物学科的发展。他曾嘱望南开不仅要做一流大学,还要建中国第一的大学,这句话一直鼓舞着我们。

陈先生11月29日下午住进医院。当晚我去看他,他根本不谈自己的病情,而是一见面就谈数学事业的发展。陈先生说:“现在我们大楼有了,这个楼并不重要,最重要的是做好的数学。”这是他最后交待的事情。陈先生弥留之际,念念不忘的还是数学。他希望中国的科学家做世界上最好的科学,中国的数学家做最好的数学。这是他的最大遗愿,对我们来说,是最大的期望,也是最大的鞭策和责任。

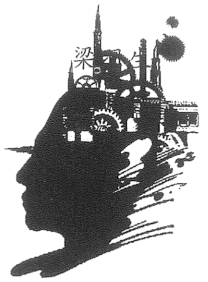
祭省身先生文

丘成桐

嗟乎先生,真弃我乎。
逝其何速,疾来何恶。
长城毁矣,泰山倾乎。
孟冬之日,遽闻耗讯。
云暗天黑,心痛神伤。
忆我早岁,父丧无依。
读书南国,未窥大道。
知我唯师,拔我香江。
育我柏城,誉我四方,
提携半生,忧乐相告。
孺子蒙德,薪火相属。
呜乎哀哉,朱弦已绝。
教育之恩,昊天罔极。

追维畴昔,切思故园。
携我东归,衷心谋国。
南开立所,双微引士。
将有鸿图,兴我祖国。
孰料积劳,竟尔罹疾。
栋梁遽毁,筹学何从。
悠悠我思,不宁唯是。
先生之学,造类几何。
已藏名山,传诸后世,
哲人其萎,师长云亡。
我忧谁诉,我喜谁告。
魂兮归来,中心是悼。

华罗庚传奇



编者按：由新武侠小说的开山鼻祖梁羽生来为数学家华罗庚作传，味道自然不同。据说，华罗庚先生是位真正的“武侠迷”，对梁羽生的作品尤为推崇，那句“武侠小说是成年人的童话”的名言就出自华罗庚之口。有了这样的渊源关系，梁氏之作就绝非道听途说的敷衍之文，而可以当成一段“信史”来读了。

何日重生此霸才

一百四十一年前(一八三九)，清代大诗人龚自珍路过元和(今江苏吴县)，写了一首诗，怀念当地一位以博学著称的学者顾千里，中有句云：“湖山旷劫三吴地，何日重生此霸才？”顾千里最长于“目录学”，但史称他“读书过目万卷，经史训诂，天文算学，莫不贯通。”当然，这“霸才”二字，只是指在学术方面的才能而言。

龚自珍此问，当日谁都不敢作答，现在则是有了答案了：“喜见天公重抖擞，不拘一格降人材！”人材降在金坛，金坛位于江苏南部，也算得是包括在广义的“三吴地”之内的。这个人材就是华罗庚。

在美国出版的《华罗庚传》(作者Stephen Salatt)，第一句就称华罗庚为“多方面名列世界前茅的数学家”，他的《堆垒素数论》，他的《数论导引》，他的《典型域上的调合分析》，以及他和万哲先合著的《典型群》等等数学著作，无一不引起国际数学界的震动。他在学问上的成就，比之顾千里已是不知要超过多少倍！岂止“名满三吴”，而是名副其实的“誉满天下”了。

平凡方显不平凡

但我不知华罗庚看了本文题目，会不会皱起眉头？

尽管他名满天下，他是自居于平凡的人的。而“传奇”是不是多少有点把他当作“奇人”看待？

我在英国的伯明翰(Birminghan)和他初次会面，他就曾经说过一句话：“我们不是怪物！”

这句话他是有感而发的，有感于一些写科学家的文章，往往把科学家写成“不近人情”的“怪物”，好像科学家的某些“怪癖”是与生俱来，没有这些“怪癖”，就不成其为科学家似的。其实科学家也是人，是有血有肉的人，并非头上涂上光圈的“不可理解”的“神人”或“怪物”！而平常人也并非就全无“怪癖”。

但我还是要说，他是既平凡又不平凡的！他出生在一个平凡的家庭，父亲是个小小杂货店的店主。你知道他的名字的由来吗？他父亲四十岁那年生下他，生来就用两个箩筐一扣，据说可以“生根”，容易养活。“箩”字去了“竹”是“罗”，“庚”“根”同音。贫穷人家的父母，最担心的是儿女长不大，华罗庚的名字，就正含着父亲对他的祝愿啊！

他的学历，不过是初中毕业，另外加上在职业学校读过一年半（未毕业即因交不起学费，而被迫退学)。而且他在二十岁那年，还因一场伤寒病而变成瘸子！

一个初中毕业生，又是一个瘸子，如果他稍为少一点毅力，那就必将是庸庸碌碌过这一生了。

但他凭着这点“可怜”的学历，通过自学，

却成变了大数学家,这还能说是“平凡”么?

可堪孤馆闭春寒

还要补充一点的是,他的出生地金坛是个小镇,能够提供给他自学的条件,也是很“可怜”的!

他是一九一0年出生的,在他的少年时代,爱因斯坦的《相对论》已经把人们的视野扩展到新的宏观世界和微观世界,欧洲的数学正进入攻坚克难的阶段,哈代与拉伊特的数论导引已经在数学的领域获得新的突破。而华罗庚在开始自学的时候,能够得到的只不过是一本代数、一本几何和一本只有五十页的微积分。

“可堪孤馆闭春寒,杜鹃声里斜阳暮。”这是古代一位词人的慨叹。比起科学先进的西方,金坛这个小镇,那是落后得太远了。两年前有一位记者访问华罗庚,得知他自学的背景之后,在文章中写下这样一句:“其状况(指金坛的落后情况)和现代科学相距遥远,恍若隔世!”(见理由的《高山与平原》一文。)上引的两句词,虽然写的不是“做学问”的处境,但我想,也可用在华罗庚身上吧?“孤馆”倘若比作与现代科学隔绝的小镇,假如自己不求“突破”,那恐怕是只有在鸣声凄切的杜鹃声里,平淡过这一生(斜阳暮)的。

但华罗庚是不甘于只听“杜鹃凄切”的,他要做翱翔在暴风雨中的海燕。“可堪”是反问语,华罗庚已经用他的自学回答了。他在许多人眼中,是“充满传奇性”的人物,但恐怕很少人懂得,他的“传奇”也是他自己的努力争取得来!

数学曾经不合格

也是龚自珍的诗:“廉锷非关上帝才,百年淬厉电光开!”诗中说的廉锷是刀剑的锋棱,引申为宝刀宝剑。宝剑如此,人材亦然。华罗庚无疑是数学的天才,但他的“天才”也是经过磨炼,“锋芒”始显的。

你大概想不到,这位大数学家也曾在数学这一科考试不合格吧?这是他读初中一年级时候的事情。我曾问他是不是因为他曾触犯那位老师,老师故意不给他合格,他说:“不是,我小时候是很贪玩的,常常逃学去看社戏。试卷又写得潦草,怪不得老师的。”

经过这次教训,从初中二年级开始,他就知道用功了。一用功锋芒立显,数学老师每逢考试的时候,就把他拉过一边,悄声对他说道:“今天的题目太容易,你上街玩去吧。”

看出胡适的逻辑错误

另一件他在初中念书时大显“锋芒”的事,是他看出胡适的逻辑错误。

初中二年级那年,他的一位国文老师,是胡适的崇拜者,要学生读胡适的作品,并写读后心得,分配给他读的,是胡适的《尝试集》。

华罗庚只看了胡适在《尝试集》前面的“序诗”,就掩卷不看了。那序诗是:“尝试成功自古无,放翁此言未必是。我今为之转一语,自古成功在尝试。”

他的“读后心得”说:这首诗中的两个“尝试”,概念是根本不同的,第一个“尝试”是“只试一次”的“尝试”,第二个“尝试”则是经过无数次的“尝试”了。胡适对“尝试”的观念尚且混淆,他的《尝试集》还值得我读吗?

当时他只是一个十三岁多一点的孩子,就看得出胡适的逻辑错误,这也可以见得他是有缜密的“科学头脑”了。

在学术上有成就的人,大都是敢于独立思考的人,倘若只知盲从前人的见解,那就只能说是“思想的懒汉”了。“思想的懒汉”,进步从何而来?

“周公诛管蔡”的风波

华罗庚指出胡适《尝试集》序诗的逻辑错误,这正是他敢于独立思考的表现。可笑的

编者按:2004 年 11 月,武汉大学国家基础科学人才培养基地(数学)迎来了国家基金委与教育部的评估验收,我院数学基地班学生梁咏祺、陈颖为专家们做了学生科研报告和学习报告,他们精彩的报告受到专家的一致好评。

基地班学生科研报告

01 数学基地班　梁永祺

尊敬的各位评估专家,领导们,老师们:

你们好,我叫梁永祺,是 01 级数学基地班学生,已经被中科院数学所录取为推荐免试研究生,学术导师初步定为张寿武老师,今天我代表数学基地班学生做一个报告,主要讲一下我学习中、科研过程中的各点体会。

在数学基地班学习近三年,从对数学的盲目喜欢,到现在对数学有所了解、更加热爱数学,这些与教导过我的老师、与这里的学习氛围是分不开的。当我刚来到数学基地班的时候,数学分析的最为一丝不苟的证明让我懂得了严格的重要性,正如大数学家韦伊所说:"严格性对于数学家而言就相当于道德。"我明白到我与数学的缘分从此慢慢铺展开。习题课是我记忆最深的,老师总是鼓励不同的方法,从那时起我就喜欢板演我的解法,同学们之间可以互相欣赏不同的解法,这是一种享受。所以从那时起每逢我想到什么不同的意见我总喜欢上黑板讨论,每逢我遇到了自己特别珍爱的我总是写成小论文。所以到了后来学生杂志《珞珈数学》的出版,我总是有我自己的小文章。这些算是我的"小科研",但这都不是刻意之作,而是平时的心得。虽然现在看起来每篇小文章都显得有点幼稚,但每一篇都记录着我思想的轨迹,每一篇的背后都有不同的心得体会,这些也正是我这三年来最为珍爱的。

这一切开始于一个英语电子词典上的智力游戏,大概是一个翻硬币的游戏,就是屏幕上所显示的。虽然看似简单的一个游戏却很难得到一个正确的玩法。我玩了好几局之后突然发现这事实上是一个线性方程组的求解问题,只是有点特别的是这个线性方程组是一个建立在 这个域上的线性方程。在线性代数课上所学的线性方程组解的一般理论是完全适用的。于是我写了个小程序,仅仅用矩阵行消去法得到了这个方程组的一般解。结论是解空间是 2 维的,在 这个域上的 2 维线性空间也就是四个解。而且结合实际问题的对称性得到了这个问题的唯一解。我当然就成了班上会玩这个游戏的第一人。但更重要的是我第一次用自己学到的东西去解决一个本来未知的问题。这完全不同于书本上的习题,书上的习题无论如何总是有解的,而且用刚学的那一节内容总可以把习题解决。而这个智力游戏没有谁告诉你可以用数学分析或者线性代数的方法去解决。更让我意外的是这个问题可以解决的如此干净,这让我深深的感觉到数学的威力之大。

数学的应用是数学中所不可缺少的一部分。于是我参加了数学建模俱乐部,成为了俱乐部中学术部的部长。让我记忆最为深刻的

是我自己主讲的一次主题为博弈论的讲座，我只选了一本科普的书，我希望的是和大家分享数学。所以需要的是把博弈论里最入门的和一些重要的例子和定理展示出来。当然不可少的还有大名鼎鼎的 von.Neumann 和 John.Nash 的故事。这次难得的经历让我学着如何去表达思想，让我明白到并不是完全拿出数学公式就能说清楚问题，数学不仅仅是公式，数学还有许许多多额外的意义，数学是栩栩如生的。

学校每年会组织学生科研立项活动，学院也有基地班专门的科研基金，只要你有兴趣总能找到老师指导，不管你能否得到什么成果老师们总乐意提出一些有价值的意见。我二年级的时候参加了一次科研立项活动，记得那时我的立项题目是高层建筑的电梯分布的数学模型。由于是第一次做一个这样固定的这个题目，感觉是很困难的。后来好不容易找到了一篇相关的科普论文，我把文中的离散模型改为连续模型，并做了一些数据分析说明这样改进的合理性，随后把我得到的连续模型用在一种稍微复杂的离散模型难以讨论清楚的情况下，不过可惜的是没有得到什么有实际意义的好的结果。这让我第一次感觉到自己知识的贫乏。

后来我和我的两位好朋友，也是我的同班同学，组队参加了 03 年的全国数学建模竞赛，获得了湖北省的一等奖。学院很支持这样的活动，为了可以很好的熟悉数学软件的使用，学院还设有基地班的计算机房。这次经历让我懂得了团结合作是最为重要的，数学里一个好的结果不少时候是合作的成果，著名的数论学家 Erdos 就是最好的例子。而且我发现课堂上所讲的总是少之又少的精华部分，由于课时的关系每一门课总不可能面面俱到，更深入更广泛的知识都是你在各种各样的相关参考书和参考文献上学来的。数模竞赛正好让我懂得了去寻找信息、寻找自己需要的数学方法与技巧。

我们的教授总会告诉我们数学的各个方面也是很精彩的，时时让我们多注意数学史以及相关的方面。我对数学的了解是方方面面的增加。我课余选修学校的公共选修课《狭义相对论浅讲》，结课论文就是《狭义相对论的数学基础》，记得当时老师的要求是给出一个洛伦茨变换的更一般的公式。事实上洛伦茨变换就是四维时空给出一个并非正定的内积看作类似欧式空间的一个正交变换，古典牛顿物理学的伽利略变换也就是三维欧氏空间中的正交变换，如果使用矩阵的推导，形式上、计算上都是简单的。所以我以此为题写了我的结课论文。感觉上我的推导并不是太完整，但也得出了正确的结果，这算是一种尝试。能利用上自己所学过的知识去解决问题总是愉快的。

后来的《科学哲学》选修课，我选题《Poincare 的约定主义与数学公理》作了论文。我试着分析庞加莱的约定主义思想，希望与我所学到的数学例子结合去感受大师的思想。这些并非是纯粹的数学，但我愿意了解数学，不仅仅是从定理上、技巧上、计算上，丰富多彩的数学还有许多侧面，这些方方面面都从不同角度展示着数学的可爱之处。《数学译林》是我喜欢的杂志，还有许多著名的科普作品例如讲述动力系统的《天遇》，外尔的讲述晶体群的《对称》，还有哈代的《一个数学家的辩白》，《美丽心灵--纳什传》等等。数学家中有许多趣闻轶事，这些都让我知道学数学不仅仅要学会数学理论，还要学会做学问的态度、学会做人的风格。这些是我需要的，学数学同时需要的数学素养。

我想我日后还是会读基础数学的，所以

我也一直注意尝试做一些基础数学的小型研究。在两年的数学分析课上完的时候我把一直思考但无法解决的九个问题收集起来写成一片小文章，不过后来我上过了实变函数的课后发现这些问题事实上很多早已经考虑过,而且完满的解决了。也就是说我所提的问题是完全没有意义的。但是我相信当我懂得了更多更深入的数学知识以后，我再提出的问题也许就是别人从来没有考虑过得问题了,这次仅仅是一个开始。

第一次尝试做点基础数学的小研究大概是在二年级下学期。我选的一个题目是《常微分方程的奇解判别法的更进一步研究》,当时已经有的结论是两个判别法:C 判别法和 p 判别法。给出的条件大概是一阶偏导数的非退化条件，我研究中要讨论的是退化情形下的对更高阶导数给出条件，是否能得到有意义的结果。记得导师的提示是仿照函数拐点的判别的条件和方法,希望得到相似的结果。学院为基地班提供很好的资料查阅、借阅条件,我们享有与研究生同等的借阅条件。在我的印象中当时我找遍了资料室里的所有常微分方程的书，能找到相关奇解判别法的书也只有少数几本，其中丁同仁的教程是唯一的一本对已知的两个判别法给出证明的。我仔细阅读这证明之后打算用相似的方法推广。但是遇到的是三元函数高阶泰勒展式处理技巧上的种种我无法克服的困难。而且我发现教程上的证明有一处地方似乎是依赖于几何直观的,并不是完全的严格分析证明。所以到了最后我没有得到任何有意义的结果，我只能说我不会做。这是一次失败的经历。事实上在学习和研究中根本不可能事事顺利，更多的情况是不顺利的。自己的知识能力还远远不够,我需要的是长时间的不断积累,只有一次又一次在失败中学习才可能等到我将来也许会有的成功，如果在登山的途中摔了一跤就转头下山，那是永远登不到山顶看到那美丽的风景的。

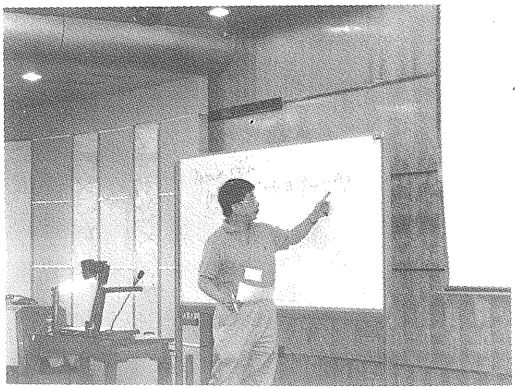
后来上了交换代数的课，用的教材是 Atiyah 的《交换代数导引》,这个教材的习题是具有启发性的。值得一提的是 Stone 定理被放在习题中，拆成多道小习题最终组成整个定理的证明。Stone 定理是说:“任一 Boole 格都与某个紧 Hausdorff 拓扑空间的既开且闭的子集构成的格同构。”证明这个定理的过程并不难,首先建立 Boole 格和 Boole 环之间的一个一一对应，然后证明 Boole 环的素谱在 Zariski 拓扑下开且闭的集合与 Boole 格中的元素一一对应而且组成一组拓扑基，最后证明 Boole 环的素谱在 Zariski 拓扑下是一个紧 Housdorff 空间。这个定理的证明并不难,不需要高不可攀的技巧。但是我对这个定理情有独钟是由于它联系了序结构、拓扑结构和代数结构,也由于这样的原因,我总结了证明写成了一篇习作。为了做出这个习题我是花了不少时间的,它的联系十分广,我顺着这个习题了解了一些关于代数几何最基本概念素谱的性质,当然这离不开代数里交换环的性质。我想学习与研究是可以从一点你熟悉的东西蔓延到各个方向，从而使自己的知识面不断增广,数学是一个统一的整体,不要仅仅看到局部的风景,要尽可能从全局上了解数学。这是我写这篇习作的收获。

非常有意思的是，有一次我做一个交换代数习题的时候犯了一个小错误，却促成了我发现了一个反例,这后来成了我的习作《关于素理想性质的一个反例》。记得那是我做一个关于一元多项式环习题得到一个错误结果，是由于证明中用了一个素理想的错误结论引起的,从而反过来得到了一个反例,并且说明了一元多项式环不是一个半局部环。老

师常说往往数学里有许多不同的道路，不同的道路有着不同的意义，换一个角度看问题往往有意想不到的结果，这次是我亲身体验到了这些道理。每一次小型的研究总让我得到不同的体会，这一切都需要积累总会有水滴石穿。

学院里总是有许多举办国内和国际会议的机会，也有很多小型的专题报告。记得在110周年校庆那一年，召开了全国数学学术年会，当然开会的几天我都在会场晃来晃去，不论什么主题的报告我都进去听一听。当然结果都几乎是一样的：大部分听不懂，或者看懂了大部分英文单词，但连成一句话的时候不知道讲的是什么东西。我只是一个好奇的听众，我觉得我会有收获的，也许是长远的，现在不会看得到。另外让我兴奋的是认识了不少名人，例如王元、丁伟岳、吴文俊几位院士和年轻的校友付磊，而且可以和他们面对面聊数学互相交流。校庆的时候，Fields奖得主沃沃斯基来到学校做的公众讲座，我是现场参加的，还有后来在学院的一次小型报告我都参加了，算是见识到大家的风范。这些都是难忘的经历，影响是潜移默化的。

最后值得一提的是上个学期末的偏微分方程与多复变国际会议。每一天主要报告结束后是一个多小时的minicourse。给我留下印象最最深刻的是李岩岩老师的课程。



李岩岩教授在PDE与多复变分析国际会议上的mini course

讲的是一个非线性Laplace方程的的边值问题，通过边值的对称性得出解的对称性，具体的如幻灯片上显示的。李岩岩老师讲的是移动平面法，用到的是Sobolev嵌入定理、Poincare不等式和强极值原理等泛函分析和偏微分方程的定理，他的目的是介绍一种处理非线性方程的技巧方法。但是他提示一维的情况是可以用常微分方程的方法做出来，并留作习题。当天晚上我想了很久没有什么结果，也许是我的基本功还不够扎实。但是我却发现如果对条件稍加改动，加强其中一个减弱另一个，不仅仅是对一维的问题，对一般n维的问题我也可以轻松得到相同的结论。而所使用的仅仅是偏微分方程课上的一个极其普通的技巧。第二天我带着我的想法请教李岩岩老师，他告诉我其实我证明了更强的结论，就是这类方程解的唯一性。这个是我听那么多讲座以来最大的收获。一个让我基本满意的结论，一次简单的讨论，其实数学有时候就这么简单。也许正是这样的原因，我觉得数学常常需要灵感，不断的读书不断的做点小研究就是在不断寻找灵感。学院给我们提供了许多这样的学术报告，让我们可以找到自己的兴趣，从中得到启发。

三年的学习，在数学基地班的氛围中，我学到了很多东西，从各个方面对数学有了更深入的理解，每一次我动笔写下一个小论文都有着那个时期我对数学的理解，记录着我思想的轨迹，这是我的数学生涯的一个开端，感谢这个环境，感谢这里老师们的教导，上述也是我三年来学习生活的点滴体会，虽然零零散散，但所述的是我的三年中最为珍爱的片段。

我就报告到这里，谢谢各位专家、各位领导。

基地班学生学习报告

02级数学基地班　陈颖

尊敬的各位评估专家，各位领导，老师们：

大家好！

我叫陈颖，是武汉大学02级数学基地班的一名同学，下面由我代表基地班同学，就入校以来的学习情况作报告。

当我第三次闻到校园里的丹桂飘香，看到珞珈山上高大的梧桐树又纷纷开始落叶之时，我才猛然意识到自己已经是一个大三的学生，回首这两年多的历程，作为武汉大学数学基地班的一员，我深感幸运。因为这里有良师，益友，有好的学习氛围，精彩纷呈的高水平学术会议，先进的教学设备，我在这里学到的不只是知识，还有学习的方法，做人的道理，这些东西对我今后的学习以及我的一生都会有深远的影响。

仍记得高中班主任看到我高考志愿时说的话："学数学是很辛苦的！"我当时的回答是："没关系，我不怕苦！"就是带着这样一股懵懂的热情，我来到了武汉大学。刚进校，我们就遇到了数学分析和线性代数这"两座大山"，这两门专业课严谨的逻辑和繁杂的推演让我第一次体会到了数学的艰辛，也体会到了自己高中的题海战术与大学课程要求的格格不入。

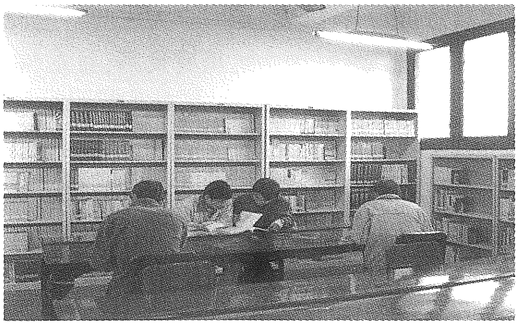
学院对我们的专业课学习非常重视，为了使我们尽快适应大学课程的要求，为我们安排了最好的老师，由博士生导师亲自给我们上课。"一个思想胜过一百种方法，一种方法胜过一百个定理，一个定理胜过一百道习题"这就是我们数学分析老师的一句话，也是让刚经历过高中填鸭式教育的我们耳目一新的一句话，正是在这种思想的引导下，我们和老师之间开始了一种启发式教学和研究型学习，不再拘泥于课本，局限于习题，而是老师在授课时讲概念、讲思想，引导大家一起想、一起思考，师生互动，教学相长，我们也开始认认真真地思考一些问题：如何精确地描述实数轴上的点列集中在某一点附近的现象？极限为无穷大时有哪些性质？如何用最少的条件推出最多的结论？定理的反面还成立吗？定理该如何推广？它的现实背景、几何意义、物理学解释又是什么？尽管我们的体会是很肤浅的，但是我们也学会了一些思考问题的方法。同时我们真正地意识到了在大学学习数学与以往的不同：注重的不是技巧、更是思想；不是机械地套公式、做练习，而是要认真地揣磨每一个定理的证明、每一个公式的由来；不仅要靠刻苦，更要靠悟性和对数学的感觉。

在这里，还不得不提到我们的习题课，我们的习题课都是老师事先打印出来，留几天给我们去想，查阅资料和讨论，甚至号召我们互相"抄"，老师说：我们不会一直抄，抄着抄着，讨论就开始了，而这样的讨论，正是老师希望看到的

学习氛围。我们的习题课演板率高达 99%，几乎每道题都 2 个人上讲台，老师会比较和评点 2 人的做法。我们习题课里最大的挑战就是每个习题课后面的“微型研究室”，涉及一些更深层次的思考和初具研究味道的内容，我们做过“曲线积分的可加性”，“处处连续处处不可微的函数”，“简单一致收敛与半一致收敛”等等，坦白说，我常常会对微型研究室里的问题感到无从下手，但是每想到一点东西，每在习题课上与同学们交流一点，都会有新的收获。

解题上老师主张一题多解，方法要简洁，有思想，而且解题后要继续思考，有好的想法他会让我们写成小论文给他看，这种现象在我们班很普遍，我们班自己的杂志《数学之旅》里面有好多文章就来源于“微型研究室”。我们课堂的形式也不是一成不变的，针对经典教材上一些错误或不当的地方，我们也曾开展过辩论，比如我们就曾经对教材上“隐函数定理”的证明是对是错开过一次辩论会，大家畅所欲言，老师从旁评点，让我们知道了关于隐函数定理证明的三种方法，也知道了书本上的证明有哪些缺陷。

关于学习环境，我们班浓厚的学习气氛让我不敢有一丝懈怠；在图书馆我们有硕士生借书的待遇，学院院楼的资料室里有很多书免费让我们查阅；现代化的机房给我们提供了很多数学软件，也为我们数学建模竞赛创造了良好的条件；更有数学建模俱乐部定期组织讲座，数模俱乐部也有自己的刊物，主要介绍一些数模相关知识，数学软件，数模竞赛的题目及优秀论文；基地班联谊会以及其主办的刊物《珞珈数学》给我们四个年级基地班同学一个相互交流和学习的平台。



我们还有机会听到许多名师大家的讲座，比如在基地班联谊会的成立仪式上，我院齐民友教授为我们做了专题报告《从拉马努金谈起》；借中国数学会第九次会议之东风，我们有幸听到了王元、田刚院士，叶其孝、谭永基教授的报告，校庆时我们听到了费尔兹奖的获得者沃沃斯基深入浅出的讲座，让我们感觉到了数学的博大精深，除了听讲座，我们还获得了与这些数学大师们面对面交流的机会，这对我们的发展也不无裨益。

经过两年多的学习，我自己也取得了一些进步和成绩，在今年的全国大学生数学建模竞赛中，我的两个队友都是我们班同学，长期以来严谨的思维训练让我们所在建模时简洁清晰，最终获得了一等奖。

时至今日，我仍觉得学数学是很苦的，但是这并不能减少它对我的吸引，每当想起老师们讲课时到精彩之处那种激昂的语调，作出那的一个个精辟的比喻，叶其孝教授在讲座上提到"数学救国"时全场如雷动的掌声，我的心里都会莫名地激动……

就象我们的老师所说的：“数学之旅，沿途一派赏心悦目的美景。”我想我会沿着这条路一直走下去，慢慢地走，好好地欣赏。

谢谢各位专家，领导，老师们。

关于方程$\Delta u=f(u)$的几个问题

01 数学基地班　梁永祺

摘要　　本文讨论几个简单的偏微分方程的解的性质，得出 Laplace 方程的解的一些对称性。

下文若无特别声明假设求解区域边界足够$\Omega \subseteq R^n$光滑，解均指古典解$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$。

定理 1　$f: R \to R$ 连续单调非减。若（1）$\begin{cases} \Delta u = f(u) \\ u = g_1 \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases}$ 或者（2）$\begin{cases} \Delta u = f(u) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases}$ 存在解则（1）的解唯一，（2）的解相差一个常数意义下唯一。

证明：　设 u_1、u_2 均为解，则 $\Delta u_1 = f(u_1)$　$\Delta u_2 = f(u_2)$，$u_1 = g_1$　on $\partial\Omega$、$u_2 = g_1$　on $\partial\Omega$，或者$\dfrac{\partial u_1}{\partial n} = g_2$　on $\partial\Omega$、$\dfrac{\partial u_2}{\partial n} = g_2$　on $\partial\Omega$，于是$u_1 - u_2 = 0$　on $\partial\Omega$ 或$\dfrac{\partial(u_1-u_2)}{\partial n} = 0$　on $\partial\Omega$。

$$0 \le \int_\Omega (u_1-u_2)[f(u_1)-f(u_2)]dx = \int_\Omega (u_1-u_2)[\Delta(u_1-u_2)]dx$$

$$= \oint_{\partial\Omega} (u_1-u_2)\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial n}ds - \int_\Omega (u_1-u_2)\left|grad(u_1-u_2)\right|^2 dx$$

$$= -\int_\Omega (u_1-u_2)\left|grad(u_1-u_2)\right|^2 dx$$

于是$grad(u_1-u_2) \equiv 0$　on Ω　$u_1-u_2 \equiv const$　on Ω，而且由（1）的边值条件知解唯一。

推论 1 Laplace 方程的 Dirichlet 问题 $\begin{cases}\Delta u=0 \\ u=g_1 & \text{on } \partial\Omega\end{cases}$ 解的唯一性。Laplace 方程的 Neumann 问题 $\begin{cases}\Delta u=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=g_2 & \text{on } \partial\Omega\end{cases}$ 的解相差一个常数意义下唯一。

证明： 定理 1 中取 $f=0$。

推论 2 设 $f:R\to R$ 连续单调非减。B 为 R^n 中的单位球则方程 $\begin{cases}\Delta u=f(u) \\ u=0 & \text{on } \partial B\end{cases}$ 如果有解 u，则 u 径向对称（即 u 在极坐标下紧与 r 有关而与角度 θ 无关）。

证明： 设 u 为一解，$A\in SO(n)$（即 $A^t=A^{-1}$）令 $v=u\circ A$，若 v 也满足原方程，则由定理 1 得 u=v 即 u 在正交变换下不变，即 u 径向对称。令 y=Ax，v(x)=u(Ax)=u(y)。设 $A=(a_{ij})$，$\forall i,1\le i\le n,\dfrac{\partial v}{\partial x_i}(x)=\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial y_j}(y)\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}(x)=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\dfrac{\partial u}{\partial y_j}(y)$，于是 $grad_x v(x)=A^t grad_y u(y)$ 而 $\forall x,v(x)=u(y)$，所以 $grad_x=A^t grad_y$。$\Delta_x=grad_x^t grad_x=(A^t grad_y)^t(A^t grad_y)\ =grad_y^t AA^t grad_y=grad_y^t grad_y=\Delta_y$，所以 $\Delta_x v(x)=\Delta_y u(y)$。而 u 为原方程的解，$\Delta_y u(y)=f(u(y))$，从而得到 $\Delta_x v(x)=f(u(y))=f(v(x))$。又 A 为保距变换，求解区域不会发生改变，而零边值总能满足，所以 v 也为原方程的解。

注 1 把推论 2 中方程换为 $\begin{cases}\Delta u=f(u) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=const & \text{on } \partial B\end{cases}$ 结论仍成立，只需要注意到在正交变换下原点的函数值保持不变，定理 1 中相差的常数只能为 0。

注 2 由此可由求解区域的某种对称性得到解的相应的对称性，证明是只需要把球 B 换成相应区域，正交变换换成相应的变换即可。

定理 2 $f:R\to R$ 连续且 $t\ge 0$ 时 $f(t)\ge 0$ 以及 $t\le 0$ 时 $f(t)\le 0$，则若方程 $\Delta u=f(u)$

有解 u，则Ω内任一分片正则的封闭的 n－1 维超曲面Γ有：$\oint\limits_{\Gamma} u\frac{\partial u}{\partial n}ds \geq 0$（n 为$\Gamma$的外法向）。

证明：Γ围成的区域为$\Sigma\subseteq\Omega$，$\oint\limits_{\Gamma} u\frac{\partial u}{\partial n}ds = \int\limits_{\Sigma}|grad\ u|^2 dx + \int\limits_{\Sigma}u\Delta u dx$

$= \int\limits_{\Sigma}|grad\ u|^2 dx + \int\limits_{\Sigma}uf(u)dx \geq 0$。

推论　$f:R\to R$连续且$t\,f(t)\geq 0$，则方程$\begin{cases}\Delta u = f(u) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g_1 & \text{on } \partial\Omega \\ u = g_2 & \text{on } \partial\Omega\end{cases}$有解的必要条件是

$\oint\limits_{\partial\Omega} g_1 g_2 ds \geq 0$。

问题的来源

问题的来源是 2004 年 6 月在武大召开的一次 PDE 与多复变国际会议的一个 mini course。讲课的是一个在国外教书的的中国人 Yanyan,Li 。他讲的内容就是以下这个问题：

（1960's）方程$\begin{cases}\Delta u = f(u) \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega\end{cases}$（$\Omega$为$R^n$中单位球），若有解$u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$，且$u>0$于$\Omega$内，f 为 Lipchitz 连续函数，则解 u 径向对称。

他花了两个课时（一个半小时）专门讲了这个题目的一个 70 年代的已经简化了的证法：移动平面法，用到的是 Sobolev 嵌入定理、Poincare 不等式和强极值原理等泛函分析和偏微分方程的定理，他的目的是介绍一种处理非线性方程的技巧方法。但是 Yanyan,Li 提示一维的情况是可以用常微分方程的方法做出来,并留作习题。

那天课后我就试着解决一维的方程，但是始终没做出来，反而发现稍微修改条件这（不仅是一维，甚至高维问题）将变成几乎是平凡的一个结论（仅仅需要 PDE 的一个常用的小技巧）于是就写成这篇小文章。

而一维的常微分方程问题至今还没有做出来，留给大家一起思考：

问题　方程$\begin{cases}u''(x) = f(u(x)) & x\in(-1,1) \\ u(-1) = u(1) = 0\end{cases}$的解$u\in C^2((-1,1))\cap C^0([-1,1])$（如果需要，不妨先加强解的条件，例如加强到边界上单侧可导 2 次），且$u>0$，f 为 Lipchitz 连续函数，则 u 为偶函数。

编者按：在2004年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛中，我院学生取得了优异的成绩，其中基地班学生获得了一个一等奖，一个二等奖。这两篇论文从不同角度分析研究了这个数模问题，对大家的学习有很大的帮助和启示，故一并刊登。

输电阻塞管理的数学模型

陈勇强 尧伟 陈颖

摘 要

本文研究的是一个电力系统交易和调度问题，当发生输电阻塞时，需要制订既安全又经济的调度计划。

本文建立了三个模型，第一个为出力分配预案模型，根据电力市场交易规则，我们通过可升出力排序表求得下一时段各机组的出力分配预案，依此模型，求出负荷需求为982.4 MW 及 1052.8 MW 时出力分配预案分别为[150 79 180 99.5 125 140 95, 113.9]和[150 81 218.2 99.5 135 150 102.1 117]，对应清算价分别为303元/时和356元/时。

第二个模型，以多元线性回归求得各线路有功潮流关于各机组出力的近似表达式，通过计算stats值，发现与给出数据吻合较好，所以得到的线形回归模型一直可用。

然后我们设计了一种简明，合理的阻塞费用计算规则：对序内容量不能出力的部分即少发电量按清算价 C_M 与发电报价之差结算，报价高于清算价的序外容量出力的部分即多发电量按发电报价结算，得到阻塞费用 $Q_T=\sum_{i=1}^{n}(P_i'-P_i)\times C_i(P_i')$。

基于以上两个模型，建立了第三个模型：输电阻塞管理模型，按照输电阻塞管理原则，这是个非线性多目标规划，由于要遵循电网“安全第一”的原则，我们优先满足通过调整消除输电阻塞或者使超过限度百分比尽量小的目标，再考虑经济目标。我们先用线性规划的方法作出如下判断：通过调整各机组出力能否消除输电阻塞？如果不能，能否使用安全裕度输电？给出判断的同时，也得到了若干可行解，进而求出近似最优解。

注：本文荣获2004“高教社杯”数模竞赛一等奖。

最后得到负荷需求为 982.4 MW 时可以消除输电阻塞，近似最优方案为[150.1606 88 228 79.9869 152 97.2517 70.0008 117]，对应阻塞费用为 4956.4 元/时,各线路潮流量为[165 149.4317 -154.9804 126.2595 132 159.5576]；负荷需求为 1052.8 MW 时不能消除阻塞，但可以调整使其过载百分比尽量小，近似最优方案为[133.9561 75.0423 228 99.5 152 155 92.3016 117]，对应阻塞费用为 9604.1 元/时,各线路潮流量为[175.1246 142.3908 -154.7762 131.3116 132.0005 162.0002]，过载百分比为[0.0614 -0.0507 -0.0326 -0.1528 0.0000 0.0000]。

在模型的补充中，我们首先简单考虑了 AGC 容量和调节需求量，其次讨论了不满足 Pool 市场交易规划的情况，建立了一个新的模型。

关键词：电力市场，输电阻塞，出力分配预案，多目标规划

0 问题的背景（略）

1 问题的提出（略）

2 模型的假设（略）

3 主要符号的说明

$V_{i,j}$：机组 i 在第 j 段的段容量，$i=1,2......,n$，$j=1,2,......,10$；

$C_{i,j}$：机组 i 在第 j 段的段价，$i=1,2......,n$，$j=1,2,......,10$；

P_i^0：机组 i 的当前出力，是对机组当前时段结束时刻实际出力的预测值，$i=1,2......,n$；

a_i：机组 i 的爬坡速率，$i=1,2......,n$；

δ_i：机组 i 在一个交易时段内最多能增加的出力，在本题中 $\delta_i=15a_i$，$i=1,2......,n$；

B：下一个时段预报的负荷需求；

Q：实时购电总费用；

C_M：下一个时段的清算价；

P_i：机组 i 的出力分配预案，$i=1,2......,n$；

P_i'：调整后机组 i 的出力分配方案，$i=1,2\ldots\ldots,n$；

Q_T：阻塞费用；

F_i：线路 i 的有功潮流，$i=1,2\ldots\ldots$, m;

L_i：线路 i 的潮流限值，$i=1,2\ldots\ldots$, m;

ξ_i：线路 i 的相对安全裕度，$i=1,2\ldots\ldots$, m。

4 问题的分析与模型的建立

4.1 问题的分析

在电力市场的 pool 交易模式下，要制订出既安全又经济的调度计划，首先，根据已制订的电力市场交易规则，建立下一个时段各机组出力分配预案模型并给出相应算法。然后，根据各线路上有功潮流关于各发电机组出力的近似表达式来判断是否会出现输电阻塞。如果不出现，接受各机组出力分配预案；否则，按照输电阻塞管理原则来实施阻塞管理。

在阻塞管理中，必须遵循电网“安全第一”的原则。如果能够调整各机组出力分配方案使得输电阻塞消除，则接受调整，不惜经济代价；如果做不到，还可以使用线路的安全裕度输电，以避免拉闸限电（强制减少负荷需求），但要使每条线路上潮流的绝对值超过限值的百分比尽量小；如果无论怎样分配机组出力都无法使每条线路上的潮流绝对值超过限值的百分比小于相对安全裕度，则必须在用电侧拉闸限电。

为了实现各机组出力的再调整，网方必须以阻塞费用的形式给发电商以经济补偿，这样从经济的角度看，网方在电网安全运行的保证下应当同时考虑尽量减少阻塞费用。

4.2 模型的建立

4.2.1 下一个时段各机组出力分配预案模型及其算法[1]

根据模型分析，我们先给出计算下一个时段各机组的出力分配预案的数学模型及其算法。

设下一个时段的清算价为 C_M，各机组的出力分配预案分别记为 P_1,P_2，……，P_n。于是 Pool 的单位时间总购电费用为：

$$Q=\sum_{i=i}^{n}C_M P_i = C_M B$$

其中，B 为下一个时段预报的负荷需求。于是，清算价的确定使得单位时间总购电费用最小。相反，可以采用使单位时间总购电费用最小的方法来确定清算价。又清算价 $C_M=\max\limits_{i=1}^{n}C_i(P_i)$，其中 $C_i(P_i)$ 为机组 i 出力 P_i 的报价。因此可以建立下一个时段各机组的出力分配预案模型如下：（各机组的出力分配预案由随后给出的算法得出）

$$\min\left\{\max_{i=1}^{n}C_i(P_i)\right\}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}P_i=B & (1)\\ P_i^0-\delta_i\le P_i\le P_i^0+\delta_i & (2)\\ V_{i,1}\le P_i\le\sum\limits_{j=1}^{10}V_{i,j} & (3)\end{cases}$$

其中，约束条件式（1）是保证各机组计划出力之和等于预报的负荷需求，约束条件式（2）为爬坡速率约束，约束条件式（3）为机组 i 的最小和最大出力限额约束。

根据清算价的确定过程可得各机组的出力分配预案的算法如下：

根据下一个时段的负荷预报、每台机组的报价、当前出力和出力改变速率，按段价从低到高选取各机组的段容量或其部分，直到它们之和等于预报的负荷，这时每个机组被选入的段容量或其部分之和形成该时段该机组的出力分配预案。

具体求解过程及解释如下[2]：令 $V=\left(V_{i,j}\right)_{n\times10}$ 为段容量矩阵，设 U 为实时出力-段容量矩阵，即各机组在各段的实时输出量矩阵，$C=\left(C_{i,j}\right)_{n\times10}$ 为机组段价矩阵。

第一步 处理 C：将 C 与 $V-U$ 中的零元对应的元素赋值无穷大。

（将当前段容量已全部输出的段位对应的段价赋值无穷大，以后不再选取）

第二步 根据处理后的 C 形成可升出力排序表 IPA，按报价由低到高排序。

第三步 计算实时出力 P_E，判断负荷是否已经平衡。如果平衡，则计算结束。否则执行下一步。

第四步 判断是否有出力小于其上限的机组。如果没有，则计算结束，问题无解；否则

执行下一步。

（如果所有机组的出力都增加到其上界，还没有达到负荷需求，则判定问题无解，

其中，第 i 台机组的出力上限为 $\min(P_i^0+\delta_i, up_i)$）

第五步　选择 IPA 中的第1台机组，设为 J，可出力为 j，根据约束条件更新 J 的出力，

并对 U 作相应改变，执行下一步。

（相当于用对应段价最低的序外段容量来更新相应机组，J 的每次更新值为

$\min(P_i^0+\delta_i, up_i, P_i+j, P_i+B-P_E)$）

第六步　判断是否有达到出力上界的机组，若有，则将其序外容量对应的段价赋值无穷

大(这样，该机组以后都不会出现在 IPA 中)。回到第一步。

4.2.2 各线路上有功潮流关于各发电机组出力的近似表达式[3]

设线路 i 上的潮流值 F_i（$i=1,2,\cdots\cdots,m$）关于各发电机组出力（P_1,P_2，……，P_n）的表达式为 F_i（P_1,P_2，……，P_n），F_i（P_1,P_2，……，P_n）光滑（可微），则线路 i 上的潮流值 F_i 在点（P_1^0,P_2^0，……，P_n^0）上的线性展开在点（P_1^0,P_2^0，……，P_n^0）的某个邻域内可以近似代替 F_i（P_1,P_2，……，P_n），即

$$F_i\left(P_1,P_2,\cdots\cdots,P_n\right)\approx\beta_{i,0}+\beta_{i,1}\cdot P_1+\cdots+\beta_{i,n}\cdot P_n\quad(i=1,2,\cdots\cdots,m)$$

记 $\beta=\begin{pmatrix}\beta_{1,0} & \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \beta_{m,0} & \beta_{m,1} & \cdots & \beta_{m,n}\end{pmatrix}$，称为回归系数矩阵，$F=(F_1,F_2\ldots\ldots,F_m)^T$ 为线路上有功潮流矩阵，$P=\left(P_1,P_2,\cdots,P_n\right)$ 为各发电机组出力矩阵。

则上述结论可用矩阵关系表示为：　$F\approx\beta(1:P)^T$

根据围绕点（P_1^0，P_2^0，……，P_n^0）所取的一些实验数据，可以用 MATLAB 统计工具箱中的 regress 命令实现多元线性回归，得出 β 最小二乘估计。

4.2.3 阻塞费用的计算[4]

设 $P_1', P_2' \ldots\ldots, P_n'$ 为调整后的各机组出力，相应的报价为 $C_1(P_1'), C_2(P_2'), \ldots\ldots, C_n(P_n')$，如果调整了机组出力分配方案，那么各机组的结算满足以下规则：

序内容量不能出力的部分即少发电量按清算价 C_M 与发电报价之差结算，报价高于清算价的序外容量出力的部分即多发电量按发电报价结算。

于是，支付给多发电量的发电机组费用为：

$$A = \sum_i [C_M P_i' + (P_i' - P_i) \times (C_i(P_i') - C_M)],\ (i \in \{i \mid P_i' > P_i\})$$

支付给少发电量的发电机组费用为：

$$B = \sum_j [C_M P_j' + (P_j - P_j') \times (C_M - C_j(P_j'))],\ (j \in \{j \mid P_j' < P_j\})$$

支付给发电量不变的发电机组费用为：

$$S = \sum_k C_M \cdot P_k',\ (k \in \{k \mid P_k' = P_k\})$$

于是阻塞费用

$$Q_T = A + B + S - Q = \sum_{i=1}^{n} (P_i' - P_i) \times (C_i(P_i') - C_M) = \sum_{i=1}^{n} (P_i' - P_i) \times C_i(P_i')$$

下面通过阻塞费用示意图来说明这种阻塞费用计算规则公平地对待了序内容量不能出力的部分和报价高于清算价的序外容量出力的部分。

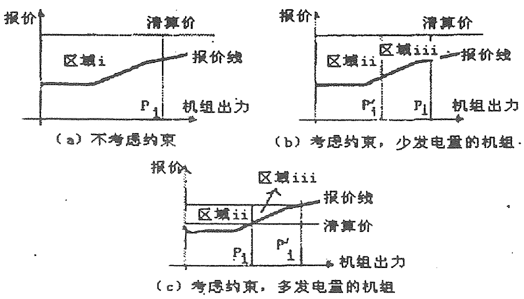


图1 阻塞费用示意图

图 1 (a)表示按出力分配预案机组 i 获得的收益情况，此时机组出力为 P_i，则区域 I 的面积表示机组 i 在出力 P_i 时获得的收益。在图 1 (b)中，区域 ii 的面积表示机组 i 在出力 P_i' 时直接获得的收益，根据上述结算规则，可得区域 iii 的面积表示机组 i 因为不能出力的部分而获得的经济补偿，于是，机组 i 在出力 P_i' 时获得的总收益为区域 ii 的面积+区域 iii 的面积，这刚好等于区域 i 的面积。这就保证了少发电量的机组收益的稳定。对于图 1 (c)可进行同样的分析，得到多发电量的机组收益也稳定。这就说明了这种阻塞费用计算规则公平地对待了序内容量不能出力的部分和报价高于清算价的序外容量出力的部分。

有了下一个时段各机组出力分配预案模型及其算法、各线路上有功潮流关于各发电机组出力的近似表达式 $F=\beta(1:P)^T$ 和阻塞费用 Q_T 后，下面来建立输电阻塞管理模型。

4.2.4 输电阻塞管理模型

这是一个多目标有约束的规划问题，要通过调整各机组的出力分配方案达到两个目标，一是使潮流不超过限值，或使超过限值的百分比尽量小，二是使因为该调整所引起的阻塞费用最小。但由输电阻塞管理原则，应优先考虑第一个目标，这样就将此多目标有约束的规划问题转化成了单目标规划问题。

按照输电阻塞管理原则，具体操作如下：

（1） 调整各机组分配方案使得输电阻塞消除：

记 $F_i'=\beta_{i,0}+\beta_{i,1}\cdot P_1'+\cdots+\beta_{i,n}\cdot P_n'$，$\Omega$ 为满足线性约束

$$\begin{cases} |F_i|\le L_i \\ |P_i'-P_i^0|\le \delta_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} P_i'=B \qquad (i=1,2\ldots\ldots n) \\ V_{i,1}\le P_i'\le \sum\limits_{j=1}^{10} V_{i,j} \end{cases}$$ 的 $\left(P_1',P_2'\ldots\ldots,P_n'\right)$ 集合，

如果 Ω 非空，那么能够调整各机组出力分配方案使得输电阻塞消除，这时输电阻塞管理模型为：

$$\min Q_T=\sum_{i=1}^{n}(P_i'-P_i)\times C_i(P_i')$$

$$s.t.\begin{cases}|F_i'|\le L_i\\ |P_i'-P_i^0|\le\delta_i\\ \sum_{i=1}^{n}P_i'=B \qquad (i=1,2\ldots\ldots n)\\ V_{i,1}\le P_i'\le\sum_{j=1}^{10}V_{i,j}\end{cases}$$

（2） 如果（1）办不到，即Ω为空集，则使用线路的安全裕度输电，以避免拉闸限电。

记ξ_i为线路i的相对安全裕度，Ψ为满足线性约束$\begin{cases}|F_i'|\le L_i(1+\xi_i)\\ |P_i'-P_i^0|\le\delta_i\\ \sum_{i=1}^{n}P_i'=B \qquad (i=1,2\ldots\ldots n)\\ V_{i,1}\le P_i'\le\sum_{j=1}^{10}V_{i,j}\end{cases}$的

$\left(P_1',P_2'\ldots\ldots,P_n'\right)$的集合，

如果Ψ非空，那么可以使用线路的安全裕度输电，以避免拉闸限电，由于各线路的安全裕度不同，安全裕度越高则安全性越高，于是用安全裕度的倒数对超过限值的百分比进行加权，求其最小值，可以使得各线路上潮流的绝对值超过限值的百分比尽量小于其安全裕度，这时输电阻塞管理模型为：$\min\sum_{|F_i|>L_i}\frac{|F_i'|-L_i}{L_i\xi_i}$

$$s.t.\begin{cases}|F_i'|\le L_i(1+\xi_i)\\ |P_i'-P_i^0|\le\delta_i\\ \sum_{i=1}^{n}P_i'=B \qquad (i=1,2\ldots\ldots n)\\ V_{i,1}\le P_i'\le\sum_{j=1}^{10}V_{i,j}\end{cases}$$

若此模型有多个解，则在其解中求出使第二目标 $Q_T=\sum_{i=1}^{n}(P_i'-P_i)\cdot C_i(P_i')$ 取得最小值的出力分配方案 P 。

（3）如果 Ψ 为空集，则必须在用电侧拉闸限电。

说明：集合 Ω 是否非空是通过对下面这个线性约束的线性优化模型的求解来判断的：

$$\min \quad P_k$$

$$s.t.\begin{cases} |F_i|\le L_i \\ |P_i-P_i^0|\le\delta_i \\ \sum_{i=1}^{n}P_i=B \qquad (i=1,2\ldots\ldots n) \\ V_{i,1}\le P_i\le\sum_{j=1}^{10}V_{i,j} \end{cases}$$

其中 k 为 $\{1,2,\ldots\ldots，\text{n}\}$ 中任一定值。

集合 Ψ 是否非空的是通过对下面这个线性约束的线性优化模型的求解来判断的：

$$\min \quad P_k$$

$$s.t.\begin{cases} |F_i'|\le L_i(1+\xi_i) \\ |P_i'-P_i^0|\le\delta_i \\ \sum_{i=1}^{n}P_i'=B \qquad (i=1,2\ldots\ldots n) \\ V_{i,1}\le P_i'\le\sum_{j=1}^{10}V_{i,j} \end{cases}$$

其中 k 为 $\{1,2,\ldots\ldots，\text{n}\}$ 中任一定值。

这两个线性优化模型主要是判断约束条件的相容性，目标函数的选取并无本质意义，只是为了求出若干组可行解。

5 问题的求解（略）
6 模型的讨论与补充

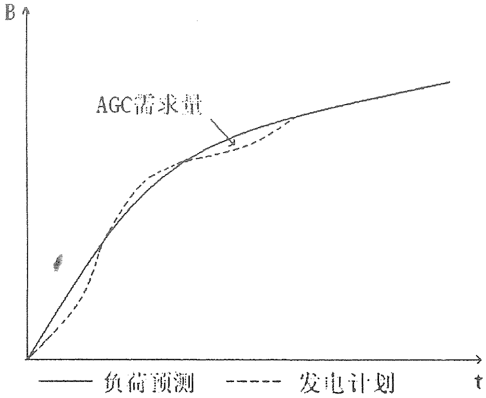


图2 正常情况下AGC容量的需求量

6.1 关于 AGC 的辅助服务。AGC 容量即为 AGC 机组的调节容量，从图 2 中可看出，如果负荷预测准确，而且各发电厂严格执行发电计划，则需要的 AGC 容量为所有不吻合中的最大不吻合量，而需要的 AGC 调节速率为所有不吻合中的最大变化率。然而，预测的负荷并非与实际负荷完全吻合，而各发电厂由于各种原因也不一定严格执行发电计划，所以实际运行情况和计划情况会存在一定的偏差。

6.2 在 Pool 电力市场交易规则下，若需求负荷给定，则机组出力分配预案也随之确定，灵活性小，从而有可能导致输电阻塞的发生而使网方蒙受损失。一个可行的解决办法是，若在交易规则下选出的处于最高段价的机组并没有输出全部段容量，那么可以调整机组的出力分配而保证清算价不变，这样就能很好的减少阻塞费用，因为在 Pool 市场交易规则下，对 $\forall i=1,2\ldots\ldots n$，$(P_i'-P_i)\times(C_i(P_i')-C_M)\geq 0$，即序外容量（未取得发电权的发电容量）的报价一定不小于清算价，如果不遵循这一规则，则 $(P_i'-P_i)\times(C_i(P_i')-C_M)$ 有可能小于 0，这样阻塞费用相对原来会减小。设按交易规则得到的预案为 P，经检验第 i 台机组处于最高段价位，且还有 ε 的段容量没有输出，调整预案 P 为 P'，以“安全第一”为主目标，减少阻塞费用为次目标，有模型

$$\min \sum_{|F_i|\geq L_i} \frac{|F_i|-L_i}{L_i\cdot\xi_i}$$

$$
s.t\begin{cases} x_j \geq 0 & j \neq i \\ P_j' = P_j - x_j & \\ P_i' = P_i + \sum\limits_{j \neq i} x_j & \\ \sum\limits_{j \neq i} x_j \leq \varepsilon & \\ l_j \leq P_j' \leq u_j & \forall j \\ F = \beta P' & \end{cases}
$$

这也是非线性规划，特别，若目标函数取值为 0，表示没有超过潮流限制。经 Lingo 验证，目标函数不可能取值为 0，这表明进行保价调整无法消除输电阻塞。

6.3　在模型一的算法中，我们是以负荷需求增加为例来计算的。事实上，负荷需求也有可能减小，这时，则应按照段价从高到低依次减少对应机组的段容量，相当于是模型一算法的一个逆过程。

6.4　模型三的算法求出的是近似解，可多计算几组局部优解以增大近似解的准确性，其计算速度快，完全可以保证在一个时段内调整出可执行的发电计划，因而具有实用性。

6.5 由模型三还可得出，当负荷需求 $B < 983.4203MW$ 时，可以调整方案使得输电阻塞消除，当 $983.4203MW < B < 1071MW$ 时，一定会出现输电阻塞，但可以让过载潮流不超过安全裕度，即不需拉闸限电，当 $B > 1071MW$ 时，则必须在用电侧拉闸。

参考文献：

[1] 杨洪明、段献忠、何仰赞，阻塞费用的计算和分摊方法，电力系统自动化，第 22 卷第 5 期：10–11 页，2002 年 5 月

[2] 王民量、张伯明、夏清，考虑机组爬坡速率和网络安全的经济调度新算法，电力系统自动化，第 24 卷第 10 期：16 页，2000 年 5 月 25 日。

[3] 萧树铁，数学实验，北京：高等教育出版社，1999 年 7 月第一版。

[4] 李挺，电力市场中输电阻塞管理的研究，万方数据库，TM76 F426.61：19–21 页，2002 年 7 月 1 日。

输电阻塞管理的数学模型

王辉　范浩　陈秉澜

摘要：

本文系统地分析了电力市场的输电阻塞管理问题。首先近似认为输电线路的有功潮流值关于各发电机组的出力满足线性关系，采用非齐次多元线性回归的方法得到近似表达式。

然后，给出了两种简便，常用的阻塞费用的定价，依照本题的要求进行了合理性讨论，并选取了一种既考虑了电力市场规则，又公平对待了序内不能出力和序外更高价出力部分的计算方法作为本文沿用的阻塞费用计算规则：

$$C_T=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{8}c(x_i)(x_i-p_i)$$

用 C_T 表示阻塞费用，$c(p_i)$ 表示发电机组 i 的报价（机组 i 被选入的段价的最大值），

x_i, p_i 分别为阻塞管理前后的出力。

对第 3 问，根据电力市场交易规则，制订了一种便捷算法得到下一时段各机组的出力分配预案，并严格证明了基于此算法所得的预案一定能保证清算价最小，得到 $P=982.4MW$ 时，出力分配预案为

$$X=(150,79,180,99.5,125,140,95,113.9)^T。$$

对于阻塞管理问题，根据阻塞管理原则，分别建立阻塞管理模型一和阻塞管理模型二，模型一是在潮流限值范围内调整，以阻塞费用最小为目标；模型二是在裕度单位内调整，以危险系数（所有线路上有功潮流超出限值的百分比与该线路的安全裕度之比）的最大值最小为目标，反映了既保证安全又保证经济的调整原则。我们设计了一种简明可行的算法来判断模型一和模型二的可行域是否为空，当可行域非空时优化求解，否则

注：本文荣获 2004“高教社杯”数模竞赛二等奖。

考虑下一种消除阻塞的方案。这样，模型一和模型二的适用范围被严格介定，符合阻塞管理原则。

P=984.2 时,根据第 1 问的线性表达式，计算出线路 1，5，6 的潮流值超出限值，按上述判断算法得到可以通过调整可使阻塞消除。于是求解模型一，运用技巧性算法将非线性规划问题转化为有限次线性规划，从而得到严格最优解：

$X=(151.525,88,228,80,152,95.875,70,117)^T$，其阻塞费用为 4685 元。同时，我们利用可行域为有界凸集的性质,利用计算机模拟得到近似最优解，时效性和准确性都很好。

P=1052.8 时，得到出力分配预案 $X=(150,81,218.2,99.5,135,150,102.1,117)^T$，同样发生输电阻塞,进一步得到其不可能通过调整使阻塞消除，但可以在安全裕度范围内调整。我们通过添加松弛变量，将最大最小化问题转化为线性规划，从而解得最优解：

$X=(153,88,228,99.5,152,113.2,102.1,117)^T$，此时的阻塞费用为 2681 元。

关键词：回归分析　危险系数　非线性规划　线性规划　计算机模拟　松弛变量

一　问题的重述（略）

二　模型的假设（略）

三　符号及参数的说明

1. P——对下一阶段的负荷需求预报
2. $c(p_i)$——发电机组 i 的报价（机组 i 被选入的段价的最大值）
3. λ_i——发电机组 i 的当前出力
4. v_i——发电机组 i 的爬坡速率
5. h_i——线路 i 的潮流限值
6. η_i——第 i 条线路的安全裕度

四　问题 1 的求解

这是一个回归分析问题，我们近似假设各线路的潮流值与各发电机组出力为（非齐次）线性关系，建立多元线性回归模型（共 6 个）：

$$y_j = \sum_{i=1}^{8} a_{ji} x_i + b_j + \varepsilon_j \qquad (1 \le j \le 6)$$

对每个$1 \le j \le 6$，y_j表示第j条线路的潮流值,$x_i\left(1 \le i \le 8\right)$表示各发电机组的出力；$a_{ji}$和$b_j$为待定的回归系数，$\varepsilon_j$为残差。

根据表 1 和表 2 的实验数据：

表 1　各机组出力方案 （单位：兆瓦，记作 *MW*）

方案\机组	1	2	3	4	5	6	7	8
1	133.02	73	180	80	125	125	81.1	90
2	129.63	73	180	80	125	125	81.1	90
3	158.77	73	180	80	125	125	81.1	90
4	145.32	73	180	80	125	125	81.1	90
5	120	78.596	180	80	125	125	81.1	90
6	120	75.45	180	80	125	125	81.1	90
7	120	90.487	180	80	125	125	81.1	90
8	120	83.848	180	80	125	125	81.1	90
9	120	73	231.39	80	125	125	81.1	90
10	120	73	198.48	80	125	125	81.1	90
11	120	73	212.64	80	125	125	81.1	90
12	120	73	190.55	80	125	125	81.1	90
13	120	73	180	75.857	125	125	81.1	90
14	120	73	180	65.958	125	125	81.1	90
15	120	73	180	87.258	125	125	81.1	90
16	120	73	180	97.824	125	125	81.1	90
17	120	73	180	80	150.71	125	81.1	90
18	120	73	180	80	141.58	125	81.1	90
19	120	73	180	80	132.37	125	81.1	90
20	120	73	180	80	156.93	125	81.1	90
21	120	73	180	80	125	138.88	81.1	90
22	120	73	180	80	125	131.21	81.1	90
23	120	73	180	80	125	141.71	81.1	90
24	120	73	180	80	125	149.29	81.1	90
25	120	73	180	80	125	125	60.582	90
26	120	73	180	80	125	125	70.962	90

27	120	73	180	80	125	125	64.854	90
28	120	73	180	80	125	125	75.529	90
29	120	73	180	80	125	125	81.1	104.84
30	120	73	180	80	125	125	81.1	111.22
31	120	73	180	80	125	125	81.1	98.092
32	120	73	180	80	125	125	81.1	120.44

表 2　各线路的潮流值（各方案与表 1 相对应，单位：*MW*）

方案\线路	1	2	3	4	5	6
1	165.81	140.13	-145.14	118.63	135.37	160.76
2	165.51	140.25	-144.92	118.7	135.33	159.98
3	167.93	138.71	-146.91	117.72	135.41	166.81
4	166.79	139.45	-145.92	118.13	135.41	163.64
5	164.94	141.5	-143.84	118.43	136.72	157.22
6	164.8	141.13	-144.07	118.82	136.02	157.5
7	165.59	143.03	-143.16	117.24	139.66	156.59
8	165.21	142.28	-143.49	117.96	137.98	156.96
9	167.43	140.82	-152.26	129.58	132.04	153.6
10	165.71	140.82	-147.08	122.85	134.21	156.23
11	166.45	140.82	-149.33	125.75	133.28	155.09
12	165.23	140.85	-145.82	121.16	134.75	156.77
13	164.23	140.73	-144.18	119.12	135.57	157.2
14	163.04	140.34	-144.03	119.31	135.97	156.31
15	165.54	141.1	-144.32	118.84	135.06	158.26
16	166.88	141.4	-144.34	118.67	134.67	159.28
17	164.07	143.03	-140.97	118.75	133.75	158.83
18	164.27	142.29	-142.15	118.85	134.27	158.37
19	164.57	141.44	-143.3	119	134.88	158.01
20	163.89	143.61	-140.25	118.64	133.28	159.12
21	166.35	139.29	-144.2	119.1	136.33	157.59
22	165.54	140.14	-144.19	119.09	135.81	157.67
23	166.75	138.95	-144.17	119.15	136.55	157.59
24	167.69	138.07	-144.14	119.19	137.11	157.65
25	162.21	141.21	-144.13	116.03	135.5	154.26
26	163.54	141	-144.16	117.56	135.44	155.93
27	162.7	141.14	-144.21	116.74	135.4	154.88
28	164.06	140.94	-144.18	118.24	135.4	156.68

29	164.66	142.27	-147.2	120.21	135.28	157.65
30	164.7	142.94	-148.45	120.68	135.16	157.63
31	164.67	141.56	-145.88	119.68	135.29	157.61
32	164.69	143.84	-150.34	121.34	135.12	157.64

将表 1 中第 i 行数据记为 $\left(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{8i}\right)$，将表 2 中第 i 行数据记为 $\left(y_{1i},y_{2i},\cdots,y_{6i}\right)$。以 $j=1$ 为例，利用 $\left(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{8i},y_{1i}\right)$，$i=1,2,\cdots,32$，来确定回归系数 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{18},b_1$。

在 MATLAB 中求解，方法如下：

Step1：利用函数命令[b,bint,r,rint,stats]=regress(y,X)，对题目所给的 32 组实验数据进行多元线形回归，得到该线路上的潮流值关于 8 台发电机组出力的初步拟合函数。

Step2：利用命令 rcoplot(r,rint)，对回归分析得到的残差处显示一个置信区间的误差条图，显示残差的 95%置信区间，根据该图剔除异常点（误差条不通过零线的点）。

Step3：重复上述步骤，对剩余的试验数据做回归分析，检验直至剔除所有异常点，得到最佳拟合函数。

按照上述三个步骤，对 $y_1,y_2,\cdots,y_6$ 分别利用试验数据求解，用矩阵 $A=\left(a_{ji}\right)$ 和列向量 $B=\left(b_j\right)^T$ 表示所得的回归系数，则：

$$Y=AX+B,$$

其中 $Y=\left(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6\right)^T$，$X=\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\right)^T$

$$A=\begin{pmatrix} 0.08313 & 0.04892 & 0.05319 & 0.12003 & -0.02511 & 0.12202 & 0.12195 & -0.00086 \\ -0.05459 & 0.12513 & -0.00022 & 0.03319 & 0.08656 & -0.11284 & -0.01847 & 0.09875 \\ -0.06949 & 0.06782 & -0.15620 & -0.01354 & 0.12468 & 0.00324 & -0.00517 & -0.20048 \\ -0.03448 & -0.10244 & 0.20516 & -0.02083 & -0.01184 & 0.00593 & 0.14650 & 0.07653 \\ 0.00053 & 0.24329 & -0.06456 & -0.04113 & -0.06522 & 0.07034 & -0.00426 & -0.00891 \\ 0.23769 & -0.05976 & -0.07773 & 0.09304 & 0.04712 & 0.00037 & 0.16560 & 0.00092 \end{pmatrix}$$

$B=\left(110.053\quad 131.527\quad -109.162\quad 77.365\quad 132.974\quad 120.554\right)^T$。

注意到极端情况，当所有发电机的出力都为零时，各线路的潮流值都为零，那么似

乎应该做齐次线性拟合。

我们对选用非齐次线性而不是齐次线性进行回归作如下说明：

1．对于所给数据，通过比较两种方法拟和后的残差平方和（表3），我们发现非齐次线性回归拟和的效果比齐次线性回归要优越得多。

表3　残差平方和比较

线路 / 残差平方和 / 回归方法	1	2	3	4	5	6
非齐次线性回归	0.02979	0.023281	0.02478	0.022957	0.024634	0.031967
齐次线性回归	79.557	112.6	77.512	39.268	115.62	95.211

2．实际生产中，除非受到不可抗拒力的作用，否则发电机组的出力是不会落在原点附近的。因此，在正常情况下，每台台发电机组的出力都不为零。

综上，我们认为用本文的拟合结果更能体现精确性。

由拟合得到的表达式，可知 $y_3<0$，因为下文中只涉及到各线路潮流的绝对值，因此我们将回归系数 $a_{31},a_{32},\cdots,a_{38},b_3$ 变为 $-a_{31},-a_{32},\cdots,-a_{38},-b_3$，其它的不变，将变换后的回归系数重记为 A,B，则线性回归方程 $Y=AX+B$ 给出了各线路潮流的绝对值关于各机组的函数表达式。下文总认为是该意义下的回归方程。

五　问题2的求解

1．阻塞费用函数

给定下一时段的负荷预报 P，假设根据电力市场交易规则，得到下一时段各机组出力分配预案为 $p_1,p_2,\cdots,p_8$，则有

$$\sum_{i=1}^{8}p_i=P$$

对应的清算价 $\omega=\max\limits_{1\le i\le 8}\{c(p_i)\}$，总购电费为：

$$C_0=\frac{\omega}{4}\sum_{i=1}^{8}p_i$$

由于要进行阻塞调整，设调整后的各机组出力分配方案为 $x_1,x_2,\cdots,x_8$，此时各机组

的报价分别为 $c(x_1),c(x_2),\cdots,c(x_8)$。一般地，阻塞费用有两种计算规则，分别为：

（a）调整后的出力分配预案按新的清算价 $\tilde{\omega}$ 结算：

$$\tilde{\omega}=\max\left\{c(x_1),c(x_2),\cdots,c(x_8)\right\}$$

于是购电费调整为：

$$\tilde{C}_0=\frac{\tilde{\omega}}{4}\sum_{i=1}^{8}x_i$$

因此阻塞费用为

$$C_T=\tilde{C}_0-C_0=\frac{1}{4}\left(\tilde{\omega}\sum_{i=1}^{8}x_i-\omega\sum_{i=1}^{8}p_i\right) \quad (1)$$

（b） 发电量超出原计划的发电机的多发部分（序内容量不能出力的部分）按上述报价结算，发电量少于原计划的发电机的少发部分（序外容量出力的部分）按清算价与该发电机的报价之差结算[3][4]。

于是，支付多发电的发电机的费用为：

$$C_1=\frac{1}{4}\sum_i\left[(x_i-p_i)c(x_i)+\omega p_i\right] \quad i\in\left\{i\,\middle|\,x_i\ge p_i\right\}$$

支付少发电的发电机的费用为：

$$C_2=\frac{1}{4}\sum_j(p_j-x_j)\left[\omega-c(x_j)\right]+\frac{1}{4}\sum_j\omega x_j \qquad j\in\left\{j\,\middle|\,x_j<p_j\right\}$$

因此，阻塞费用为

$$C_T=C_1+C_2-C_0 \quad (2)$$

化简该表达式可得阻塞费用的计算规则为：

$$C_T=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{8}c(x_i)(x_i-p_i) \quad (3)$$

2. 关于合理性的讨论

对于规则（a）给出的阻塞费用函数（1），只考虑了电力市场规则，而没有体现公平地对待序内容量不能出力的部分和报价高于清算价的序外容量出力的部分。相反的，规则（b）在对 C_1,C_2 的计算都尽量满足了电力市场交易规则，并且阻塞费用的定价中 C_1,C_2 的系数比为 1：1，表明已基本做到公平地对待序内容量不能出力的部分和报价高于清算价的序外容量出力的部分。这说明规则（b）确定的阻塞费用更符合题意。

因此，下文中的所有模型的阻塞费用均按照规则（b）计算。

六 问题 3 的求解

根据表 4 中方案 0 给出的各机组的当前出力（当前时段结束时刻的出力值），表 5，表 6，表 7 中给出的各机组的段容量、段价和爬坡速率，对于某个负荷需求 P（下一时段的负荷需求预报），我们希望按照电力市场交易规则得出各机组出力预案。

表 4 当前出力 （单位：MW）

方案\机组	1	2	3	4	5	6	7	8
0	120	73	180	80	125	125	81.1	90

表 5 各机组的段容量 （单位：MW）

机组\段	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	70	0	50	0	0	30	0	0	0	40
2	30	0	20	8	15	6	2	0	0	8
3	110	0	40	0	30	0	20	40	0	40
4	55	5	10	10	10	10	15	0	0	1
5	75	5	15	0	15	15	0	10	10	10
6	95	0	10	20	0	15	10	20	0	10
7	50	15	5	15	10	10	5	10	3	2
8	70	0	20	0	20	0	20	10	15	5

表 6 各机组的段价（单位：元/兆瓦小时，记作元/MWh）

机组\段	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-505	0	124	168	210	252	312	330	363	489
2	-560	0	182	203	245	300	320	360	410	495
3	-610	0	152	189	233	258	308	356	415	500
4	-500	150	170	200	255	302	325	380	435	800

5	-590	0	116	146	188	215	250	310	396	510
6	-607	0	159	173	205	252	305	380	405	520
7	-500	120	180	251	260	306	315	335	348	548
8	-800	153	183	233	253	283	303	318	400	800

表 7　各机组的爬坡速率　（单位：*MW*/分钟）

机组	1	2	3	4	5	6	7	8
速率	2.2	1	3.2	1.3	1.8	2	1.4	1.8

Step1 根据表 7 中爬坡速率，以当前出力为初始值，得到 $t+30$ 时刻各机组出力的上下限（见表 8）：

表 8　各机组出力上下限　（单位：*MW*）

机组	1	2	3	4	5	6	7	8
下限	87	58	132	60.5	98	95	60.1	63
上限	153	88	288	99.5	152	155	102.1	117

Step2 由表 6 各机组的出力范围，得到各机组可以取到的段容量或其部分：

机组 1：第 3 段的$[87,120]$，第 4，5，6，7，8，9 段的全部，第 10 段的$[150,153]$。

机组 2：第 5，6，7，8，9 段的全部，第 10 段的$[81,88]$。

机组 3：第 3 段的$[132,150]$，第 4，5，6，7 段的全部，第 8 段的$[200,228]$。

机组 4：第 3 段的$[60.5,70]$，第 4，5 段全部，第 6 段的$[90,99.5]$。

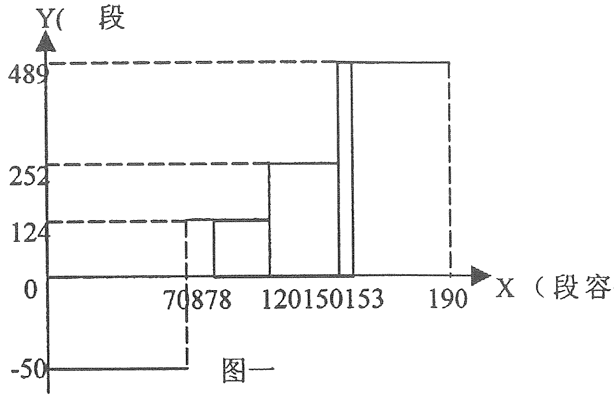
机组 5：第 5 段的$[98,110]$，第 6，7，8，9 段的全部，第 10 段的$[145,152]$。

机组 6：第 1 段的右端点，第 2，3，4，5，6，7 段的全部，第 8 段的$[150,155]$。

机组 7：第 2 段的$[60.1,65]$，第 3，4，5 段的全部，第 6 段的$[95,102.1]$。

机组 8：第 1 段的$[63,70]$，第 2，3，4，5，6 段的全部，第 7 段的$[110,117]$。

对于机组 1，给出可取到的段容量的示意图，其它类似可得。



图一

Step3 令每台发电机组都取表 8 中出力的下限，得到总供电量的下限为 653.6*MW*，当 $P \le 653.6$ 时，出力预案即为每台发电机组的出力下限；同理，对个机组的出力取上限，得到最大供电量 1094.6*MW*，当 $P \ge 1094.6$ 时，出力预案即为每台发电机组的出力上限；仅当 $653.6 \le P \le 1094.6$ 时则存在可行的出力预案。

Step4 对于 $653.6 \le P \le 1094.6$ 的情况，对 Step2 得到的所有机组的全部的段容量，依以下规则选取：

（1）对同一机组来说，按段序数从小到大选取，例如对机组 1，若第 3 段未被选中，则永不选第 4 段。

（2）在此前提下，每次的选取都将有且只有 8 种可能。在这 8 种可能中，选取段价最小的。

将每次选中的段容量（或其部分），累加到 653.6*MW* 中，当累加和第一次不比 P 小时，此时选中的段容量为最后一个需要的段容量，其选取部分保证累加和恰好等于负荷预算 P。这样得到满足电力市场规则的出力分配预案。

定理：按照电力市场规则给出的出力分配预案一定是表 8 给出的范围中的最优分配预案。

证明：假设得到的出力预案对应的清算价为 C_M，并设此时各发电机组分别取到第 $n_1, n_2, \cdots, n_8$ 个段容量（或其部分），则由取法可知对一切的第 n_i+1 个段容量，对应的段价都不小于 C_M。因此，对于任意一种与之不同的可行出力预案，一定有某些发电机组所取到的段容量的段序数不小于 n_i，从而对应的清算价不小于 C_M。则可知任意一种与之

不同的可行出力预案其购电费用不小于得到的出力预案。

此即证明了电力市场规则恰好是一个寻找最优分配预案的算法。

按照上述算法，在 MATALAB 编程（见附件的程序 1），令 $P=982.4$，得到出力分配预案，$X=(150,79,180,99.5,125,140,95,113.9)^T$，该预案的清算价为 303 元/$MWh$，该时段的购电费为 $f=\frac{1}{4}\times 303\times 982.4=7.4417\times 10^4$ 元。

七 阻塞管理模型的建立（略）

八 问题 4 的解答

由问题 1 的结论，可算出上述出力分配预案对应的各线路的潮流值分别为：

$$Y=(173.33,141.00,150.98,120.94,136.83,168.53)^T$$

对比表 6 的各线路的限值，可知线路 1，5，6 发生输电阻塞，需要进行阻塞管理。

1． $(151.225,87.999,228,86.282,152,99.796,60.1,117)\subset D$，因此 D 非空。

2． 求解阻塞管理模型一

Step1 寻找可行域 D 中 x_i 的取值范围，分别做线性规划问题：

$$\min z=x_1$$

$$s.t.\quad\begin{cases}a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{j8}x_8+b_j\le h_j & j=1,2,\cdots,6\\ \sum_{i=1}^{8}x_i=P & \\ \lambda_i-15v_i\le x_i\le\lambda_i+15v_i & i=1,2,\cdots,8\end{cases}$$

和

$$\max z=x_1$$

$$s.t.\quad\begin{cases}a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{j8}x_8+b_j\le h_j & j=1,2,\cdots,6\\ \sum_{i=1}^{8}x_i=P & \\ \lambda_i-15v_i\le x_i\le\lambda_i+15v_i & i=1,2,\cdots,8\end{cases}$$

可得变元 x_1 的范围。

分别令目标函数为 $\max z=x_i$，$\min z=x_i$，（$i=2,3\cdots,8$）。共做 16 次线性规划，

可得包含D的最小超长方体E。

通过 MATLAB 编程计算，可得该超长方体域可表示为：

$x_1 \in [151.02,153]$，$x_2 \in [86.943,88]$，$x_3 \in [226.88,228]$，$x_4 \in [72.81,90.765]$，

$x_5 \in [151.48,152]$，$x_6 \in [95,101.37]$，$x_7 \in [60.1,77.186]$，$x_8 \in [116.38,117]$。

Step2 将阻塞管理模型一转化为多个线性规划问题

对照段容量表 3，利用由上得出的超长方体，又有$D \subset E$。可得各机组可能会取到的段容量，下表给出了相应的段序数：

表 9 机组出力可能取的段序数

机组	1	2	3	4	5	6	7	8
可取得的段序数	10	10	8	4,5,6	10	1,3	2,3,4	7

所有的可能的段序数的组合为 18 种，对于每一种固定的段序数的组合，由$c(p_i)$的性质（阶梯函数），可知出力在上述取法意义下，目标函数为线性的。

例如各机组的的出力方案分别限定在段序数为 10，10，8，4，10，1，2，7 的段容量内。阻塞管理模型一转化为线性规划模型：

$$\min C_T = \frac{1}{4}\big(489(x_1-q_1)+495(x_2-q_2)+356(x_3-q_3)+200(x_4-q_4)$$
$$+510(x_5-q_5)-607(x_6-q_6)+120(x_7-q_7)+303(x_8-q_8)\big)$$

$$s.t.\begin{cases}-a_{31}x_1-a_{32}x_2-\cdots-a_{38}x_8-b_3\le h_3 \\ a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{j8}x_8+b_j\le h_j & j=2,4 \\ \sum_{i=1}^{8}x_i \doteq P \\ \lambda_i-15v_i\le x_i\le \lambda_i+15v_i & i=1,2,\cdots,8 \\ 151.02\le x_1\le 153 \\ 86.943\le x_2\le 88 \\ 226.88\le x_3\le 228 \\ 72.81\le x_4\le 90 \\ 151.48\le x_5\le 152 \\ x_6 \doteq 95 \\ 60.1\le x_7\le 65 \\ 116.38\le x_8\le 117\end{cases}$$

因此，当取遍这 18 种段序数的组合，可得到 18 个线性规划问题，对这 18 个问题的分别判断可行域是否为空再求解（如果非空），所得的最优解（如果存在）再取最小值，可知这就是原问题的整体最优解。

Step3 结论

1．在 MATLAB 中编程，可求得最优解分别为

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 151.525192767824 \\
x_2 &= 87.999999999925 \\
x_3 &= 227.999999994971 \\
x_4 &= 80.000000003750 \\
x_5 &= 151.999999998580 \\
x_6 &= 95.874807230286 \\
x_7 &= 70.000000006024 \\
x_8 &= 116.999999998640
\end{aligned}
$$

此时得阻塞费用为 4684 元。

2．用 LINDO 求解，可得：

$x_1 = 151.525208$

$x_2 = 88$

$x_3 = 228$

$x_4 = 80$

$x_5 = 152$

$x_6 = 95.874802$

$x_7 = 70$

$x_8 = 117$

阻塞费用为 4685 元。

3．计算机模拟求最优解

Step1： 循环利用随机函数产生三个 $R_{8\times1}$ 随机矩阵

分别做三次线性规划问题：

$$\min z = x_1R(1) + x_2R(2) + \cdots + x_8R(8)$$

$$s.t.\quad \begin{cases} a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{j8}x_8 + b_j \le h_j & j = 1,2,\cdots,6 \\ \sum_{i=1}^{8} x_i = P & \\ \lambda_i - 15v_i \le x_i \le \lambda_i + 15v_i & i = 1,2,\cdots,8 \end{cases}$$

产生 3 个满足条件的可行出力分配方案，分别记为

$(x_{i1}, x_{i2}, \cdots x_{i8})$， i=1, 2, 3

Step2：利用随机函数产生 $R'_{2\times1}$ 随机矩阵

利用上步已产生的 3 个可行出力分配方案构造出新的分配方案 $(x_1, x_2, \cdots x_8)$，

构造函数为：

$$x_i = (x_{1i}R'(1) + x_{2i}(1 - R'(1)))R'(2) + x_{3i}(1 - R'(2)) \qquad i = 1,2,\cdots 8$$

由于可行域为一凸集，根据凸集性质，由 3 个可行解确定的三角形中（包括边界）任意一点在凸集中，这样：若 $(x_{i1}, x_{i2}, \cdots x_{i8})$， i=1, 2, 3 均为可行出力分配方案，则按上述方法构造产生的新的分配方案 $(x_1, x_2, \cdots x_8)$ 也为可行出力分配方案。

针对已知初始分配方案，计算调整到新的分配方案的阻塞费用。

Step3：在 Step1 的前提下循环 Step2 N 次，比较记录循环所产生的 N 次费用中的最小值 C 及此时对应的分配方案 $(x_1, x_2, \cdots x_8)$

Step4：循环前面三个步骤 M 次，比较记录 $C_1, C_2, \cdots C_M$ 中的最小阻塞费用及此时对应的分配方案。

利用以上步骤求解模型，取 M=40, N=1000（调试经验表明，在一个三角形中随机搜索 1000

个点就能找到它的局部最优解)，5 次所得最小阻塞费用与最优解的相对误差如下表：

表 10 搜索结果与整体最优解的对比

运行结果	4709	4711	4697	4709	4695
相对误差	0.541%	0.583%	0.290%	0.541%	0.231%

在普通 PC 机上运行一次的时间大约为九秒，该计算机模拟程序能较好较快地得出近似最优解。

九 问题五的解答

假设负荷需求 P=1052.8MW，根据文中第六部分的法则，运行程序 1，得到出力分配预案：

$$X=(150,81,218.2,99.5,135,150,102.1,117)^T$$

再次运用问题 1 的结论，可算出上述出力分配预案对应的各线路的潮流值分别为：

$$Y=(177.3,141.16,156.19,129.79,134.85,167.09)^T$$

对比表 6 的各线路的限值，可知线路 1，5，6 发生输电阻塞，需要进行阻塞管理。

1．根据文中第七部分模型是否适用的判断算法，在第一步就得到：在潮流限值范围内，P=1052.8MW的可行域为空。因此考虑阻塞管理模型二。

2．容易根据表 11 计算出裕值为：

表 11 各线路的潮流限值（单位：MW）和相对安全裕度

线路	1	2	3	4	5	6
限值	165	150	160	155	132	162
安全裕度	13%	18%	9%	11%	15%	14%

$$Y_{\max}=(186.45,177,174.4,172.05,151.8,184.68)^T$$

对于 Y 和 $Y_{\max}$ 的每个分量，都对应有 $|y_i|<y^i_{\max}$，即该出力预案满足模型的限制条件，因此模型有可行解。

3．将该模型转化为线性规划模型，方法如下：

添加松弛变量δ和约束条件$\tau_j \le \delta$，$(j=1,2,\cdots,6)$则目标函数转化为$\min\delta$，

得到线性规划模型：

$$\min\delta$$

$$s.t.\quad \begin{cases} \dfrac{t_j}{\eta_j} \le \delta & j=1,2,\cdots,6 \\ \sum\limits_{i=1}^{8} x_i = P & \\ \lambda_i - 15v_i \le x_i \le \lambda_i + 15v_i & i=1,2,\cdots,8 \\ \dfrac{a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{j8}x_8 + b_j - h_j}{h_j} = t_j & j=1,2,\cdots,6 \\ t_j \le \eta_j & j=1,2,\cdots,6 \end{cases}$$

运行 LINDO 求解，得到最优解为：

X=(153,88,228,99.5,152,113.2 ,102.1,117)^T

$\delta_{\min} = 0.39589$，此时的阻塞费用$C_T = 2681$元。

十 模型的评价（略）

参考文献

[1] 苏金明 .阮沈勇，MATLAB6.1 使用指南，北京：电子工业出版社，2002。

[2] RAU N S,Transmission loss and congestion cost allocation—an approach based on responsibility ，IEEE Trans,on Power Systems,2000，15(4):1401～1409。

[3] 杨洪明 段献忠 何仰赞，阻塞费用的计算和分摊方法，电力自动化设备，2002，22（5），10～28。

[4] 李帆 朱敏，英国电力市场及输电系统简介，电力系统自动化，1999，23（2），33～40。

[5] 陈宝林，最优化理论与算法，北京：清华大学出版社，2004。

[6]尚金成 黄永皓，电力市场技术支持系统设计与关键技术研究，北京：中国电力出版社，2002。

后 记

一个结束，一个开始。

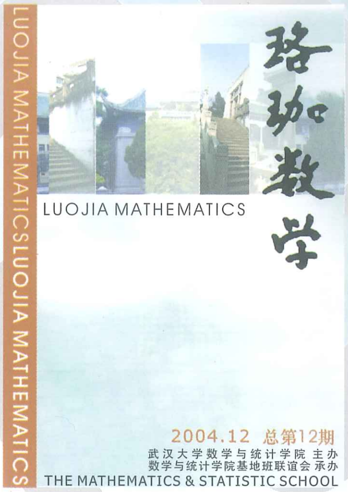
三本精美的《珞珈数学》摆在我的面前，我轻轻的抚摸着，“那是我的梦想”，我在心底轻叹着。虽然我没有创造出什么辉煌，但我确实留下了什么，留下了我在大学的点点足迹。

在若干年后，学弟学妹们看到它的时候，我并不期望他们能从其中汲取许多，但我希望它可以做为我们基地前进的一个乐曲，并更加渴望他们能将这首乐曲唱的更响，奏的更亮。

最后，让我以泰戈尔的诗结束我在《珞珈数学》的美好日子。

天空没有一丝痕迹，但我已飞过。

——ourpurple



LUOJIA MATHEMATICSLUOJIA MATHEMATICS

路珈数学

刊名题词：路见可
顾　　问：陈　化
　　　　　尹常倬
指导老师：吴蜀江
　　　　　黄安云
　　　　　李　好
主　　编：楚　静
副 主 编：牛鋆辉
　　　　　胡　雪
排版设计：天星印务
电　　话：68766036